Pro gradu -tutkielma

Solumaiset ositusavaruudet

Ville Sirviö
Matematiikan ja tilastotieteen osasto,
Helsingin yliopisto

7. kesäkuuta 2018

Ohjaaja: Pekka Pankka

HELSINGIN YLIOPISTO — HELSINGFORS UNIVERSITET — UNIVERSITY OF HELSINKI

Tiedekunta/Osasto — Fakultet/Sektion — Faculty	Laitos — Institution — Department
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Tekijä — Författare — Author

Ville Sirviö

Työn nimi — Arbetets titel — Title

Solumaiset ositusavaruudet

Oppiaine — Läroämne — Subject

Matematiikka

Työn laji — Arbetets art — Level	Aika — Datum — Month and year	Sivumäärä — Sidoantal — Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Kesäkuu 2018	45 s.

Tiivistelmä — Referat — Abstract

Tämä tutkielma käsittelee tekijäavaruuksien luokkaa nimeltä solumaiset ositusavaruudet. Tutkielma koostuu kahdesta pääosiosta, joista ensimmäisessä osoitetaan, että solumaisen ositusavaruuden projektiokuvaus on sopivilla ehdoilla hieno homotopiaekvivalenssi, ja toisessa annetaan riittävä ja välttämätön ehto sille, että haarautuva peitekuvaus lokaalisti kompaktien ANR-avaruuksien eli absoluuttisten ympäristöretraktien välillä virittää haarautuvan peitekuvauksen kyseisistä ANR-avaruuksista muodostettujen solumaisten ositusavaruuksien välille.

Peruskäsitteet-osiossa esitellään absoluuttiset ympäristöretraktit, peitteiden tähtitihennykset, simplisiaaliset kompleksit ja Hilbertin kuutio. Esitiedoiksi oletetaan yleisen topologian ja homotopioiden perusteet.

Luvussa kolme määritellään ylöspäin puolijatkuvat ja solumaiset ositusavaruudet. Lisäksi annetaan eräs karakterisaatio ylöspäin puolijatkuville ositusavaruuksille ja osoitetaan topologisten avaruuksien eräiden yleisimpien ominaisuuksien periytyvän avaruudesta muodostetuille ylöspäin puolijatkuville ositusavaruuksille.

Luvun neljä alussa esitellään UV^n-ominaisuuden ja n-homotopiatähtitihennyksen käsitteet ja todistetaan niitä hyödyntäen tutkielman ensimmäinen päätulos, eli että solumaisen ositusavaruuden projektiokuvaus on sopivien ehtojen voimassa ollessa hieno homotopiaekvivalenssi.

Viimeisessä luvussa määritellään ensin haarautuva peitekuvaus sekä kuvauksen (G, H)-yhteensopivuus ja vahva (G, H)-yhteensopivuus. Sitten osoitetaan, että ankara haarautuva peitekuvaus f lokaalisti kompaktien ANR-avaruuksien välillä virittää haarautuvan peitekuvauksen näistä ANR-avaruuksista muodostettujen solumaisten ositusavaruuksien välille, jos ja vain jos kuvaus f on vahvasti (G, H)-yhteensopiva.

Avainsanat — Nyckelord — Keywords

Tekijätopologia, Haarautuva peitekuvaus, Absoluuttinen ympäristöretrakti, Homotopia

Säilytyspaikka — Förvaringsställe — Where deposited

Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja — Övriga uppgifter — Additional information

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Solumaisetositusavaruudet (engl. *cell-like decomposition spaces*) ovat tekijäavaruuksia, jotka virittää topologisen avaruuden *solumainen* ositus. Solumainen ositus koostuu joukoista, jotka ovat kompakteja ja joilla on samankaltaiset homotooppiset ominaisuudet kuin pisteellä. Solumaiset ositusavaruudet ovat osoittautuneet hyödyllisiksi muun muassa ylempiulotteisten monistojen karakterisoinnissa niiden topologisten ominaisuuksien perusteella. Erilaisista ositusavaruuksista tekee yleisesti hyödyllisiä se, että usein on mahdollista osoittaa, että sopivien ehtojen ollessa voimassa avaruudella ja sen ositusavaruudella on samankaltaiset topologiset ominaisuudet. [Dav86]

Tämän tutkielman ensimmäinen päätulos on, että avaruus Y on sopivilla ehdoilla *hienosti homotopiaekvivalentti* (engl. *fine homotopy equivalent*) siitä muodostetun solumaisen ositusavaruuden Y/G kanssa. Hienona homotopiaekvivalenssina tässä toimii ositusavaruuden projektiokuvaus $\pi : Y \to Y/G$.

Lause. *Olkoot Y ja Y/G kompakteja ANR-avaruuksia ja G solumainen ositus. Tällöin projektiokuvaus $\pi : Y \to Y/G$ on hieno homotopiaekvivalenssi.*

Sana *hieno* tarkoittaa tässä, että jos merkitsemme homotopiaekvivalenssin käänteiskuvausta $f : Y/G \to Y$, niin homotopiakuvaukset $F : f \circ \pi \simeq \mathrm{id}_Y$ ja $G : \pi \circ f \simeq \mathrm{id}_{Y/G}$ siirtävät avaruuksien Y ja Y/G pisteitä vain vähän. Lauseen väite pätee myös jos avaruuksien Y ja Y/G on oletettu kompaktin sijaan olevan N_2-avaruuksia, mutta tällöin todistus on huomattavasti pidempi. Siksi käsittelemme vain kompaktin tapauksen.

Tulos on alkujaan peräisin G. Kozlowskilta [Koz] ja W. E. Haverilta [Hav75]. Lauseen ja sen lemmojen todistuksessa on tässä tutkielmassa kuitenkin ensisijaisena lähteenä käytetty R. J. Davermanin kirjaa *Decompositions of manifolds* [Dav86] ja S. Armentroutin ja T. M. Pricen artikkelia *Decompositions into Compact Sets with UV Properties* [AP69].

Tutkielman toinen pääaihe ovat *haarautuvat peitekuvaukset* (engl. *branched coverings*). Niitä käsitellään tapauksessa, jossa sekä kuvauksen lähtö- että maalijoukko ovat solumaisia ositusavaruuksia. Haarautuvia peitekuvauksia on tutkittu useissa eri asiayhteyksissä, joista monet koskettavat monistoja. Eräs klassinen niihin liittyvä ratkaisematon ongelma on monistojen esittäminen haarautuvana peitteenä eli haarautuvan peitekuvauksen alkukuvana. J. W. Alexanderin tunnetun tuloksen mukaan jokainen suunnistuva suljettu sileä n-ulotteinen monisto on pallon $\mathbb{S}^n$ haarautuva peite [Ale20].

Tämän tutkielman toinen ja viimeinen päätulos on, että ankara haarautuva peitekuvaus kahden lokaalisti kompaktin ANR-avaruuden välillä virittää haarautuvan peitekuvauksen näistä avaruuksista muodostettujen solumaisten ositusavaruuksien välille, jos ja vain jos kuvaus toteuttaa tietynlaisen vahvan yhteensopivuusehdon.

Lause. *Olkoot X ja Y lokaalisti kompakteja ANR-avaruuksia, G avaruuden X solumainen ositus, H avaruuden Y solumainen ositus ja $f : X \to Y$ ankara haarautuva peitekuvaus, joka on (G, H)-yhteensopiva. Tällöin indusoitu kuvaus $\tilde{f} : X/G \to Y/H$ on haarautuva peitekuvaus, jos ja vain jos f on vahvasti (G, H)-yhteensopiva.*

Lauseen ja sen lemmojen todistukset on sovitettu M. Bonkin ja D. Meyerin kirjan *Expanding Thurston Maps* vastaavista lauseista, joissa väitteet on todistettu Moore-tyypin osituksille ja haarautuvien peitekuvausten lähtö- ja maaliavaruutena on $\mathbb{S}^2$ [BM17].

Luku 2

Peruskäsitteet

Käymme ensin läpi peruskäsitteet. Kaikki ympäristöt tässä tutkielmassa ovat avoimia, ellei erikseen toisin mainita. Merkinnällä $A \subset B$ tarkoitetaan aina aitoa osajoukkorelaatiota ja merkinnällä $A \subseteq B$ tavallista osajoukkorelaatiota. Joukon X kaikkien osajoukkojen kokoelmaa eli joukon X potenssijoukkoa merkitään $\mathcal{P}(X)$. Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on tässä tutkielmassa positiivisten kokonaislukujen joukko $\{1, 2, \dots\}$. Merkitsemme sen lisäksi $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Suljetulle yksikkövälille $[0, 1]$ käytämme merkintää I ja avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljetulle origokeskiselle yksikkökuulalle merkintää $\overline{B}^n$. Avointa a-keskistä r-säteistä yksikkökuulaa merkitään $B(a, r)$ ja vastaavaa suljettua kuulaa $\overline{B}(a, r)$. Jos (X, d) on metrinen avaruus, S sen osajoukko ja $\eta > 0$, niin joukon S avointa η-ympäristöä eli joukkoa $\{x \in X \mid d(x, S) < \eta\}$ merkitään $N(S; \eta)$. Yhdistettyä funktiota $f \circ g$ merkitään toisinaan vain fg, jotta pitkät kaavarivit olisivat luettavampia.

2.1 ANR-avaruudet

Ensimmäisenä aiheena käsittelemme topologisten avaruuksien luokkaa nimeltä ANR eli absoluuttiset ympäristöretraktit. ANR-avaruudet ovat osoittautuneet optimaaliseksi luokaksi avaruuksia, joissa tarkastella solumaisia ositusavaruuksia, koska tarkasteltavien avaruuksien ollessa ANR-avaruuksia solumaisten ositusavaruuksien olennaisimmat ominaisuudet pätevät.

Ennen kuin määrittelemme ANR-avaruuden, määrittelemme kuitenkin, mikä on *retrakti*.

Määritelmä 2.1. Olkoon X topologinen avaruus. Sanomme, että osajoukko $A \subseteq X$ on avaruuden X *retrakti*, jos on olemassa jatkuva kuvaus $r : X \to A$, jolla pätee $r(a) = a$ kaikilla $a \in A$. Kuvausta r kutsutaan tällöin *retraktioksi*.

Sitten annamme ANR-avaruuden määritelmän.

Määritelmä 2.2. Sanomme, että metristyvä avaruus Y on *absoluuttinen ympäristöretrakti* eli *ANR* (engl. *absolute neighborhood retract*), jos seuraava ehto pätee: Jos X on metristyvä, $A \subseteq X$ suljettu ja $f : A \to Y$ on jatkuva, niin kuvauksella f on jatkuva jatke $g : U \to Y$ johonkin osajoukon A ympäristöön U.

Nimitys *absoluuttinen ympäristöretrakti* tulee siitä, että jos ANR-avaruus Y on metristyvän avaruuden X suljettu osajoukko, niin ANR-avaruuden määritelmän mukaan identiteettikuvauksella $\mathrm{id} : Y \to Y$ on olemassa jatkuva jatke $r : U \to Y$ johonkin joukon Y ympäristöön avaruudessa X. Siis ANR-avaruus Y on jonkin *ympäristönsä retrakti.* Toisaalta tämä ominaisuus ei riipu metristyvästä avaruudesta X, jonka osajoukoksi Y ajatellaan. Siis ominaisuus on *absoluuttinen.*

Tietzen jatkolauseesta (kts. esimerkiksi [Dug66, lause VII.5.1]) seuraa suoraan, että reaalilukujen avaruus $\mathbb{R}$ on ANR-avaruus. Koska avoimet välit ovat homeomorfisia avaruuden $\mathbb{R}$ kanssa, niin nekin ovat ANR-avaruuksia.

Osoitamme seuraavaksi, että ANR-avaruuksien avoimet osajoukot ovat ANR-avaruuksia.

Propositio 2.3. *ANR-avaruuden avoin osajoukko on ANR-avaruus.*

Todistus. Olkoot Y ANR-avaruus, $U \subseteq Y$ avoin, X metristyvä avaruus, $A \subseteq X$ suljettu ja $f : A \to U$ jatkuva kuvaus. Koska $U \subseteq Y$, niin kuvauksen f maalijoukkona voidaan pitää myös koko avaruutta Y. Koska Y on ANR-avaruus, on kuvauksella f jatkuva jatke $g : V \to Y$ johonkin joukon A ympäristöön V. Nyt $g^{-1}U$ on avoin, sillä U on avoin ja g jatkuva. Sitten koska kuvauksen g rajoittuma

$$g|g^{-1}U : g^{-1}U \to U$$

on kuvauksen f jatkuva jatke joukon A ympäristöön $g^{-1}U$, on näin osoitettu, että U on ANR-avaruus. $\square$

Todistamme vielä perustuloksen, jonka mukaan ANR-avaruuksien retraktit ovat ANR-avaruuksia.

Propositio 2.4. *ANR-avaruuden retrakti on ANR-avaruus.*

Todistus. Oletetaan, että F on ANR-avaruuden Y retrakti ja $r : Y \to F$ sitä vastaava retraktio. Olkoot X metristyvä avaruus, $A \subseteq X$ suljettu ja $f : A \to F$ jatkuva kuvaus. Koska $F \subseteq Y$, niin kuvauksen f maalijoukkona voidaan pitää myös koko avaruutta Y. Siis kuvauksella f on jatkuva jatke $g : U \to Y$ johonkin joukon A ympäristöön U. Nyt $r \circ g : U \to F$ on haluttu jatkuva jatke kuvaukselle $f : A \to F$. Näin ollen ANR-avaruuden Y mielivaltaisen retraktin F on osoitettu olevan ANR-avaruus. $\square$

Kaikki suljetut välit ovat avaruuden $\mathbb{R}$ retrakteja, joten edellisestä seuraa, että myös ne ovat ANR-avaruuksia.

Lisäksi on mahdollista osoittaa, että monistot ovat ANR [Han51, lause 3.3]. Toisaalta kuitenkin edellisen lauseen nojalla esimerkiksi origokeskisen yksikkökuulan ja x-akselin yhdiste avaruudessa $\mathbb{R}^2$ on ANR-avaruus, vaikka se ei ole monisto. Siis ANR-avaruus on monistoa aidosti yleisempi käsite.

2.2 Tähtitihennykset

Tämän osion päätulos on lause, jossa osoitetaan *tähtitihennyksen* olemassaolo metristyvillä N_2-avaruuuksilla. Kyseistä tietoa tarvitaan myöhemmin lemman 4.9 todistamiseen. Aloitamme määrittelemällä peitteen *tihennyksen*.

Määritelmä 2.5. Topologisen avaruuden X peite $\mathcal{D}'$ on peitteen $\mathcal{D}$ *tihennys* (engl. *refinement*), jos jokainen peitteen $\mathcal{D}'$ joukko sisältyy johonkin peitteen $\mathcal{D}$ joukkoon.

Määrittelemme tähtitihennyksen joukon *tähden* käsitteen avulla.

Määritelmä 2.6. Olkoot $\mathcal{D}$ avaruuden X peite ja $A \subseteq X$. Tällöin joukon A *tähdellä* peitteessä $\mathcal{D}$ tarkoitetaan joukkoa

$$\mathrm{St}(A, \mathcal{D}) = \bigcup \{U \in \mathcal{D} \,|\, U \cap A \neq \varnothing\}.$$

Määritelmä 2.7. Peitettä $\mathcal{D}'$ sanotaan peitteen $\mathcal{D}$ *tähtitihennykseksi* (engl. *star refinement*), jos peite $\{\mathrm{St}(U, \mathcal{D}') \,|\, U \in \mathcal{D}'\}$ tihentää peitettä $\mathcal{D}$.

Tarvitsemme tähtitihennyksen olemassaolotodistuksessa *ykkösen osituksen* ja johonkin peitteeseen *sopivan ykkösen osituksen* käsitteitä. Annamme seuraavaksi käsitteiden edellyttämät määritelmät.

Määritelmä 2.8. Olkoon X topologinen avaruus. Perhe $(A_j)_{j \in J}$ avaruuden X osajoukkoja on *lokaalisti äärellinen*, jos jokaisella avaruuden X pisteellä on ympäristö, joka kohtaa joukon A_j vain äärellisen monella indeksillä j.

Määritelmä 2.9. Olkoon X topologinen avaruus. Jatkuvan kuvaksen

$$g : X \to \mathbb{R}$$

kantaja (engl. *support*) on joukon $\{x \in X \,|\, g(x) \neq 0\}$ sulkeuma ja sitä merkitään $\operatorname{spt} g$.

Määritelmä 2.10. Olkoon X topologinen avaruus. Perhe $(g_j)_{j \in J}$ jatkuvia funktioita $g_j : X \to I$ on *ykkösen ositus*, jos

1. perhe $(\operatorname{spt} g_j)_{j\in J}$ on lokaalisti äärellinen,
2. $\sum_{j\in J} g_j(x) = 1$ kaikilla $x \in X$.

Määritelmä 2.11. Olkoon $(U_j)_{j\in J}$ topologisen avaruuden X avoin peite. Sanomme, että ykkösen ositus $(g_j)_{j\in J}$ on peitteeseen (U_j) *sopiva*, jos $\operatorname{spt} g_j \subseteq U_j$ kaikilla $j \in J$.

Osoitamme seuraavan lemman avulla, että metristyvän N_2-avaruuden jokaisella avoimella peitteellä on lokaalisti äärellinen tihennys. Palautetaan kuitenkin ensin mieleen, mikä on N_2-avaruus.

Määritelmä 2.12. Topologinen avaruus on N_2-avaruus (engl. *second countable space*), jos sillä on numeroituva kanta.

Lemma 2.13. [Vai15, lause 12.27] *Metristyvässä N_2-avaruudessa on jokaista avointa peitettä kohti olemassa siihen sopiva ykkösen ositus.*

Lemma 2.14. *Metristyvän N_2-avaruuden jokaisella avoimella peitteellä on lokaalisti äärellinen avoin tihennys.*

Todistus. Olkoon $(U_j)_{j\in J}$ metristyvän N_2-avaruuden X avoin peite. Lemman 2.13 nojalla on olemassa kyseiseen peitteeseen sopiva ykkösen ositus $(g_j)_{j\in J}$. Määritellään nyt $V_j = \{x \in X \mid g_j(x) \neq 0\}$ kaikilla $j \in J$. Huomataan, että $V_j = g_j^{-1}(0,1]$, missä väli $(0,1]$ on avoin joukko avaruudessa I ja g_j jatkuva, joten V_j on avoin kaikilla j. Koska (g_j) on ykkösen ositus ja $V_j \subseteq \operatorname{spt} g_j$, niin perhe (V_j) on lokaalisti äärellinen. Koska (g_j) on lisäksi peitteeseen (U_j) sopiva, niin

$$V_j \subseteq \operatorname{spt} g_j \subseteq U_j,$$

joten (V_j) on peitteen (U_j) tihennys. Siis (V_j) on peitteen (U_j) lokaalisti äärellinen avoin tihennys. $\square$

Palautetaan tässä välissä mieleen topologisten avaruuksien erotteluominaisuudet.

Määritelmä 2.15. Olkoon $j \in \{1,2,3,4\}$. Sanomme, että topologinen avaruus X on *T_j-avaruus*, jos se toteuttaa ehdon (T_j) seuraavista ehdoista.

(T_1) Jos $a, b \in X$ ja $a \neq b$, niin pisteillä a ja b on kummallakin ympäristö, johon toinen ei kuulu.

(T_2) Jos $a, b \in X$ ja $a \neq b$, niin pisteillä a ja b on erilliset ympäristöt.

(T_3) Jos $a \in X$, $B \subseteq X$ on suljettu ja $a \notin B$, niin pisteellä a ja joukolla B on erilliset ympäristöt.

(T_4) Jos $A, B \subseteq X$ ovat suljettuja ja $A \cap B = \varnothing$, niin joukoilla A ja B on erilliset ympäristöt.

T_2-avaruutta kutsutaan myös *Hausdorffin avaruudeksi* ja avaruutta, joka on sekä T_1 että T_3, sanotaan *säännölliseksi avaruudeksi* (engl. *regular space*).

Tarvitsemme vielä kolme lemmaa luvun päätulosta varten. Niiden todistukset seuraavat J. Dugundjin kirjan *Topology* [Dug66] aliluvun VIII.3 todistuksia.

Lemma 2.16. *Olkoon $(U_j)_{j\in J}$ lokaalisti äärellinen perhe topologisen avaruuden X osajoukkoja. Tällöin*

1. *perhe $(\overline{U_j})$ on myös lokaalisti äärellinen,*
2. *jokaisella $J_0 \subseteq J$ pätee, että joukko $\cup\{\overline{U_i} \mid i \in J_0\}$ on suljettu.*

Todistus. Olkoon $x \in X$. Koska (U_j) on lokaalisti äärellinen, niin pisteellä x on sellainen ympäristö V_x, että $U_j \cap V_x = \varnothing$ kaikilla indeksin j arvoilla lukuunottamatta jotain indeksijoukon äärellistä osajoukkoa. Olkoon nyt j sellainen, että $U_j \cap V_x = \varnothing$. Tällöin $U_j \subseteq X \setminus V_x$, joten $\overline{U_j} \subseteq X \setminus V_x$, sillä $X \setminus V_x$ on suljettu. Näin ollen $\overline{U_j} \cap V_x = \varnothing$. Tämä todistaa ensimmäisen väitteen.

Olkoon $F = \cup_{i\in J_0}\overline{U_i}$. Jokaisella $x \notin F$ on kohdan 1 nojalla ympäristö U, joka leikkaa korkeintaan äärellistä määrää joukkoja $\overline{U_j}$. Merkitään näitä joukkoja $\overline{U_{j_1}}, \ldots, \overline{U_{j_n}}$. Tällöin $U \cap \bigcap_{i=1}^{n} X \setminus \overline{U_{j_i}}$ on pisteen x ympäristö, joka ei leikkaa joukkoa F. Siis $X \setminus F$ on avoin. □

Määritelmä 2.17. Olkoon $\mathcal{B}$ topologisen avaruuden X peite. Peitettä $\mathcal{P}$ sanotaan peitteen $\mathcal{B}$ *barysentriseksi tihennykseksi* (engl. *barycentric refinement*), jos peite $\{\mathrm{St}(x, \mathcal{P}) \mid x \in X\}$ tihentää peitettä $\mathcal{B}$.

Lemma 2.18. *Olkoon $(U_j)_{j\in J}$ T_4-avaruuden X lokaalisti äärellinen avoin peite. Tällöin peitteellä (U_j) on avoin barysentrinen tihennys.*

Todistus. Koska X on T_4-avaruus, $F_j = X \setminus \cup_{i\neq j} U_i$ on suljettu ja U_j on joukon F_j ympäristö, niin joukolla F_j on toinen ympäristö V_j, jolla pätee $\overline{V_j} \subseteq U_j$. Nyt siis joukot V_j muodostavat peitteen (U_j) tihennyksen (V_j). Lisäksi koska peite (U_j) on lokaalisti äärellinen, niin myös peite (V_j) on lokaalisti äärellinen. Määritellään nyt jokaista pistettä $x \in X$ kohti joukko

$$W_x = \bigcap\{U_i \mid i \in J, x \in \overline{V_i}\} \cap \bigcap\{X \setminus \overline{V_j} \mid j \in J, x \notin \overline{V_j}\}.$$

Osoitamme, että $(W_x)_{x\in X}$ on haluttu avoin peite. Havaitaan ensin, että jokainen W_x on avoin: peitteen (V_j) lokaalin äärellisyyden ansiosta ensimmäinen termi on äärellinen leikkaus ja lemman 2.16 nojalla jälkimmäinen termi

$X \setminus \cup\overline{V_j}$ on avoin joukko. Lisäksi (W_x) on peite, sillä $x \in W_x$ kaikilla $x \in X$. Olkoon nyt $x_0 \in X$ ja $j \in J$ sellainen, että $x_0 \in \overline{V_j}$. Tällöin jokaisella x, jolla $x_0 \in W_x$, on pisteen x kuuluttava joukkoon $\overline{V_j}$, koska muutoin pätisi $W_x \subseteq X \setminus \overline{V_j}$. Nyt koska $x \in \overline{V_j}$, niin $W_x \subseteq U_j$. Näin ollen $\mathrm{St}(x_0, (V_j)) \subseteq U_j$. Koska $W_x \subseteq \overline{V_i}$ kaikilla $i \in J$, joilla $x \in \overline{V_i}$, ja joukot W_x ovat avoimia, niin tällöin myös $W_x \subseteq V_i$. Näin ollen

$$\mathrm{St}(x_0, (W_x)) \subseteq \mathrm{St}(x_0, (V_j)) \subseteq U_j$$

ja väite on siten todistettu. □

Lemma 2.19. *Peitteen $\mathcal{P}$ barysentrisen tihennyksen $\mathcal{P}'$ barysentrinen tihennys $\mathcal{P}''$ on peitteen $\mathcal{P}$ tähtitihennys.*

Todistus. Olkoot $U_0 \in \mathcal{P}''$ ja $x_0 \in U_0$. Valitaan jokaista $U \in \mathcal{P}''$, jolla

$$U \cap U_0 \neq \varnothing,$$

kohti piste $y \in U \cap U_0$. Tällöin $U \cup U_0 \subseteq \mathrm{St}(y, \mathcal{P}'') \subseteq V$ jollain $V \in \mathcal{P}'$. Koska jokainen tällainen V sisältää pisteen x_0, niin $\mathrm{St}(U_0, \mathcal{P}'') \subseteq \mathrm{St}(x_0, \mathcal{P}') \subseteq W$ jollain $W \in \mathcal{P}$. Tämä todistaa väitteen. □

Nyt olemme valmiit todistamaan tähtitihennysten olemassaolon metristyvissä N_2-avaruuksissa.

Lause 2.20. *Metristyvän N_2-avaruuden jokaisella avoimella peitteellä on avoin tähtitihennys.*

Todistus. Olkoon X metristyvä N_2-avaruus ja $\mathcal{D}$ avaruuden X avoin peite. Lemman 2.14 nojalla peitteellä $\mathcal{D}$ on lokaalisti äärellinen avoin tihennys $\mathcal{D}'$. Nyt soveltamalla lemmaa 2.18 kahdesti saadaan peitteelle $\mathcal{D}'$ barysentrisen tihennyksen barysentrinen tihennys $\mathcal{D}''$. Lemman 2.19 nojalla $\mathcal{D}''$ on peitteen $\mathcal{D}'$ tähtitihennys ja siten $\mathcal{D}''$ on myös peitteen $\mathcal{D}$ tähtitihennys. □

Väite pätee itseasiassa myös ilman N_2-oletusta. Tämä on mahdollista todistaa ordinaalilukuja hyödyntämällä [Rud69].

2.3 Simplisiaaliset kompleksit

Käymme seuraavaksi läpi *simplisiaalisten kompleksien* käsitteen, jota tulemme soveltamaan seuraavassa luvussa projektiokuvauksen homotopiaekvivalenssin lausetta edeltävissä lemmoissa. Simplisiaalinen kompleksi on avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko, joka on muodostettu liimaamalla *simpleksejä* kiinni toisiinsa. Simpleksit ovat kolmion n-ulotteinen yleistys: 0-ulotteinen simpleksi on piste, 1-ulotteinen simpleksi jana, 2-ulotteinen simpleksi kolmio, 3-ulotteinen simpleksi tetraedri ja niin edelleen. Ennen kuin voimme määritellä simpleksit täsmällisesti, niin tarvitsemme kuitenkin *affiinisti vapaan* ja *konveksin* käsitteet. Tämä aliluku käyttää päälähteenään Munkresin kirjan *Elements of Algebraic Topology* alilukuja 1.1 ja 1.2 [Mun84].

Määritelmä 2.21. Sanotaan, että pistejoukko $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ on *affiinisti vapaa* (engl. *affinely independent*), jos joukko

$$\{x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$$

on lineaarisesti vapaa.

Huomautus 2.22. Affiini vapaus on hyvin määritelty, sillä pistejoukko

$$\{x_1 - x_0, \ldots, x_k - x_0\}$$

on lineaarisesti vapaa, jos ja vain jos pistejoukko

$$\{x_0 - x_i, \ldots, x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, \ldots, x_k - x_i\}$$

on lineaarisesti vapaa ($i \in \{1, \ldots, k\}$).

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *konveksin* osajoukon voidaan intuitiivisesti käsittää olevan joukko, jonka pinta on kupera. Määrittelemme sen nyt muodollisesti.

Määritelmä 2.23. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukko S on *konveksi*, jos jokaisen kahden pisteen $x, y \in S$ välinen jana eli joukko $\{tx + (1-t)y \mid t \in I\}$ sisältyy osajoukkoon S.

Seuraavaksi määrittelemme pistejoukon virittämän konveksin joukon.

Määritelmä 2.24. Pistejoukon $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *virittämäksi konveksiksi joukoksi* sanotaan joukkoa

$$[x_1, \ldots, x_k] = \{\sum_{i=1}^{k} t_i x_i \mid t_i \in I \text{ kaikilla } i, \sum_{i=1}^{k} t_i = 1\}.$$

Propositio 2.25. *Olkoon $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Tällöin joukko $[x_1, \ldots, x_k]$ on konveksi.*

Todistus. Olkoot $t_1, \ldots, t_k, t'_1, \ldots, t'_k \in I$ sellaiset, että

$$\sum_{i=1}^{k} t_i = \sum_{i=1}^{k} t'_i = 1.$$

Olkoon $t \in I$. Tällöin

$$t \sum_{i=1}^{k} t_i x_i + (1-t) \sum_{i=1}^{k} t'_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (t t_i + (1-t) t'_i) x_i$$

ja
$$\sum_{i=1}^{k}(tt_i + (1-t)t_i') = t\sum_{i=1}^{k} t_i + (1-t)\sum_{i=1}^{k} t_i' = t + 1 - t = 1.$$
Näin ollen
$$(t\sum_{i=1}^{k} t_i x_i + (1-t)\sum_{i=1}^{k} t_i' x_i) \in [x_1, \ldots, x_k].$$
Siis joukko $[x_1, \ldots, x_k]$ on konveksi. □

Pistejoukon virittämä konveksi joukko on myös pienin konveksi joukko, joka sisältää kyseisen pistejoukon.

Lause 2.26. *Olkoon $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Tällöin joukko $[x_1, \ldots, x_k]$ on pienin konveksi joukko, joka sisältää pisteet $x_1, \ldots, x_k$*

Todistus. Proposition 2.25 nojalla joukko $[x_1, \ldots, x_k]$ on konveksi. On siis enää osoitettava, että se on pisteet $x_1, \ldots, x_k$ sisältävistä konvekseista joukoista pienin.

Oletetaan, että $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on konveksi ja $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq A$. Olkoon $t_i \geq 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$ ja $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$. Todistetaan induktion avulla, että piste
$$\frac{\sum_{i=1}^{j} t_i x_i}{\sum_{i=1}^{j} t_i}$$
kuuluu joukkoon A kaikilla $j \in \{1, \ldots, k\}$. Jos $j = 1$, niin väite saa muodon $x_1 \in A$, mikä on oletuksen nojalla tosi. Oletetaan nyt, että
$$\frac{\sum_{i=1}^{j} t_i x_i}{\sum_{i=1}^{j} t_i} \in A$$
jollain $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ ja osoitetaan, että tällöin
$$\frac{\sum_{i=1}^{j+1} t_i x_i}{\sum_{i=1}^{j+1} t_i} \in A.$$
Induktio-oletuksen ja joukon A konveksiuden nojalla piste
$$\frac{\sum_{i=1}^{j+1} t_i x_i}{\sum_{i=1}^{j+1} t_i} = \frac{\sum_{i=1}^{j} t_i}{\sum_{i=1}^{j+1} t_i}\frac{\sum_{i=1}^{j} t_i x_i}{\sum_{i=1}^{j} t_i} + \frac{t_{j+1}}{\sum_{i=1}^{j+1} t_i}x_{j+1}$$
kuuluu joukkoon A, sillä
$$\frac{\sum_{i=1}^{j} t_i}{\sum_{i=1}^{j+1} t_i} + \frac{t_{j+1}}{\sum_{i=1}^{j+1} t_i} = \frac{\sum_{i=1}^{j+1} t_i}{\sum_{i=1}^{j+1} t_i} = 1.$$
Olemme näin ollen osoittaneet, että joukon $[x_1, \ldots, x_k]$ mielivaltainen piste $\sum_{i=1}^{k} t_i x_i$ kuuluu joukkoon A ja siten $[x_1, \ldots, x_k] \subseteq A$. □

Nyt olemme viimein valmiit määrittelemään simpleksin.

Määritelmä 2.27. Joukkoa $S \subseteq \mathbb{R}^n$ kutsutaan *k-simpleksiksi*, jos se on $k+1$ pisteen muodostaman affiinisti vapaan pistejoukon virittämä konveksi joukko. Simpleksin virittäviä $k+1$ pistettä sanotaan simpleksin *kärkipisteiksi* (engl. *vertex*). Jos simpleksin kärkipisteet ovat $x_0, x_1, \ldots, x_k$, niin simpleksiä voidaan merkitä $x_0 x_1 \ldots x_{k-1} x_k$.

Huomautus 2.28. 0-simpleksi on yhden pisteen virittämä konveksi joukko eli kyseinen piste itse, 1-simpleksi on kahden pisteen virittämä konveksi joukko eli pisteiden välinen jana, 2-simpleksi on kolmio, jonka kärkipisteet ovat sen virittävät kolme pistettä, ja 3-simpleksi on tetraedri, jonka kärkipisteet ovat sen virittävät neljä pistettä.

Simpleksin tahkoiksi sanotaan niitä alempiulotteisia simpleksejä, jotka muodostavat sen "reunan". Tällaisia ovat esimerkiksi janan päätepisteet, kolmion sivut ja kärkipisteet ja tetraedrin tahkot, sivut ja kärkipisteet. Muodollisesti tahkot määritellään simpleksin kärkipisteiden osajoukkojen virittäminä konvekseina joukkoina.

Määritelmä 2.29. Olkoot $x_1, \ldots, x_k$ simpleksin S kärkipisteet ja

$$F \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Tällöin joukkoa $[F]$ kutsutaan simpleksin S *tahkoksi* (engl. *face*).

Nyt voimme määritellä simplisiaalisen kompleksin.

Määritelmä 2.30. *Simplisiaalinen kompleksi* K on sellainen joukko avaruuden $\mathbb{R}^n$ simpleksejä, että

1. jokaisen simpleksin $\sigma \in K$ tahkot kuuluvat myös kompleksiin K,
2. kahden simpleksin $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ leikkaus on simpleksin σ_1 tahko ja simpleksin σ_2 tahko,
3. jokaisella avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteellä on ympäristö, joka leikkaa vain äärellistä määrää kompleksin K simpleksejä.

Annetaan seuraavaksi muutama simplisiaaliseen kompleksiin liittyvä määritelmä.

Määritelmä 2.31. Simplisiaalisen kompleksin *tausta-avaruudeksi* (engl. *underlying space*) sanotaan sen simpleksien yhdistettä. Kompleksin K tausta-avaruutta merkitään $|K|$ tai vain K, jos asiayhteydestä on selvää, että tarkoitetaan tausta-avaruutta eikä itse kompleksia.

Määritelmä 2.32. Jos $k \in \mathbb{N}_0$ on suurin sellainen luku, että simplisiaalisen kompleksin K simplekseihin kuuluu k-simpleksi, niin kompleksia K sanotaan simplisiaaliseksi k-kompleksiksi.

Määritelmä 2.33. Simplisiaalisen kompleksin *k-ranka* (engl. *k-skeleton*) on sen kaikkien korkeintaan k-ulotteisten simpleksien joukko. Jos K on simplisiaalinen kompleksi, niin sen k-rankaa merkitään $K^{(k)}$.

Määritelmä 2.34. Simplisiaalista kompleksia sanotaan *äärelliseksi*, jos se on äärellinen joukko.

Määritelmä 2.35. Simplisiaalisen kompleksin *alikompleksi* on sen osajoukko, joka on myös itse simplisiaalinen kompleksi.

Huomautus 2.36. Simplisiaalisten kompleksien määritelmän ehtoa 3 tarvitaan siksi, että ilman sitä päädyttäisiin esimerkiksi sellaiseen erikoiseen tilanteeseen, että avaruuden $\mathbb{R}$ kaikki pisteet muodostaisivat 0-simplekseinä simplisiaalisen kompleksin, jonka tausta-avaruus olisi $\mathbb{R}$. Ehto 3 pätee automaattisesti äärellisillä simplisiaalisilla komplekseilla ja kaikki tässä tutkielmassa käsiteltävät kompleksit ovat äärellisiä, joten kyseinen ehto voidaan olennaisesti jättää huomiotta.

Osoitamme nyt, että äärellisen simplisiaalisen kompleksin tausta-avaruus on kompakti. Sitä varten tarvitsemme kuitenkin ensin pienen lemman.

Lemma 2.37. *Minkä tahansa pistejoukon $\{x_1, \ldots, x_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ virittämä konveksi joukko on kompakti.*

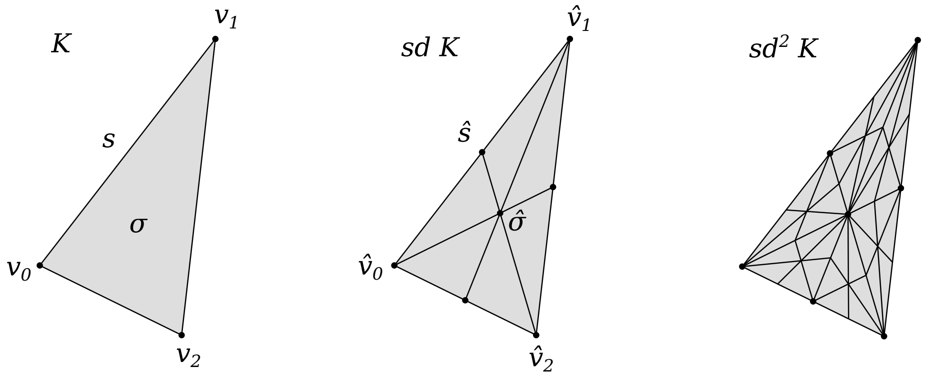
Todistus. Olkoon $f : I^k \to \mathbb{R}^n$ kuvaus $(t_1, \ldots, t_k) \mapsto \sum_{i=1}^k t_i x_i$ ja $g : I^k \to \mathbb{R}$ kuvaus $(t_1, \ldots, t_k) \mapsto \sum_{i=1}^k t_i$. Koska yksiö $\{1\}$ on suljettu ja kuvaus g jatkuva, niin joukko $g^{-1}\{1\}$ on suljettu. Siis joukko $g^{-1}\{1\}$ on kompaktin joukon I^k suljettuna osajoukkona kompakti. Näin ollen joukko $[x_1, \ldots, x_k] = f(g^{-1}\{1\})$ on kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa ja siten kompakti. □

Lause 2.38. *Äärellisen simplisiaalisen kompleksin tausta-avaruus on kompakti.*

Todistus. Simpleksit ovat lemman 2.37 nojalla kompakteja joukkoja, joten äärellisen simplisiaalisen kompleksin tausta-avaruus on kompaktien joukkojen äärellisenä yhdisteenä kompakti. □

Seuraavaksi tarkastelemme simplisiaalisten kompleksien alijakoja.

Määritelmä 2.39. Olkoon K simplisiaalinen kompleksi. Kompleksin K' sanotaan olevan kompleksin K *alijako* (engl. *subdivision*), jos pätee, että



Kuva 2.1: Simplisiaalisen kompleksin K barysentrinen alijako.

1. kompleksin K' jokainen simpleksi sisältyy johonkin kompleksin K simpleksiin,

2. kompleksin K jokainen simpleksi on yhdiste kompleksin K' simpleksejä.

Konstruoimme nyt simplisiaalisen kompleksin barysentrisen alijaon. Kuvassa 2.1 on esitetty yksinkertaisen simplisiaalisen kompleksin kaksi ensimmäistä barysentristä alijakoa.

Määritelmä 2.40. Olkoon $\sigma = x_0 x_1 \dots x_k$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ simpleksi. Simpleksin σ *painopiste* (engl. *barycenter*) on avaruuden $\mathbb{R}^n$ piste

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} x_i.$$

Määritelmä 2.41. Olkoon K simplisiaalinen kompleksi. Määritellään sitten simplisiaalinen kompleksi $\operatorname{sd} K$ siten, että jos $\sigma_0, \dots, \sigma_k \in K$, niin simpleksi $\hat{\sigma}_0 \dots \hat{\sigma}_k \in \operatorname{sd} K$, jos ja vain jos $\sigma_0 \subset \cdots \subset \sigma_k$. Kompleksia $\operatorname{sd}^1 K = \operatorname{sd} K$ kutsutaan kompleksin K *1. barysentriseksi alijaoksi*. Kompleksin K *n. barysentrinen alijako* $\operatorname{sd}^n K$ määritellään rekursiivisesti kaavalla $\operatorname{sd}(\operatorname{sd}^{n-1} K)$ jokaisella $n > 1$.

Seuraavassa lauseessa osoitetaan, että barysentristä alijakoa toistamalla simpleksien halkaisijat saadaan mielivaltaisen pieniksi. Tarvitsemme sitä varten kuitenkin neljä lemmaa.

Lemma 2.42. *Avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljetut kuulat ovat konvekseja.*

Todistus. Olkoot $a \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Olkoot nyt $x, y \in \overline{B}(a, r)$. Tällöin

$$\begin{aligned}|(tx + (1-t)y) - a| &= |t(x-a) + (1-t)(y-a)| \\ &\leq t|x-a| + (1-t)|y-a| \leq tr + (1-t)r = r\end{aligned}$$

kaikilla $t \in I$. Näin ollen $tx + (1-t)y \in \overline{B}(a, r)$ kaikilla $t \in I$. □

Lemma 2.43. *Simpleksin $\sigma = v_0 \dots v_p$ halkaisija on*

$$\max\{|v_i - v_j| \mid i, j \in \{0, \dots, p\}\}.$$

Todistus. Merkitään $l = \max |v_i - v_j|$. Koska $v_i, v_j \in \sigma$, niin tiedämme, että $\operatorname{diam} \sigma \geq l$. Yhtäsuuruutta varten haluamme siis osoittaa, että pätee myös $l \leq \operatorname{diam} \sigma$.

Todistamme ensin, että $|x - v_i| \leq l$ kaikilla $x \in \sigma$. Lemman 2.42 nojalla suljettu kuula $\overline{B}(v_i, l)$ on konveksi. Siis koska se sisältää kaikki simpleksin σ kärkipisteet ja simpleksi itse on pienin konveksi joukko, joka sisältää omat kärkipisteensä, niin se sisältää koko simpleksin σ. Näin ollen $|x - v_i| \leq l$ kaikilla $x \in \sigma$.

Osoitamme sitten, että $|x - z| \leq l$ kaikilla $x, z \in \sigma$, jolloin $\operatorname{diam} \sigma \leq l$, kuten haluttiin. Olkoon $x \in \sigma$. Yllä olevan nojalla tämä suljettu kuula $\overline{B}(x, l)$ sisältää simpleksin σ kaikki kärkipisteet. Koska kuula on konveksi, niin se sisältää koko simpleksin σ. Siis $|x - z| \leq l$ kaikilla $x, z \in \sigma$. □

Lemma 2.44. *Olkoot $\sigma = v_0 \dots v_p$ simpleksi ja $z \in \sigma$. Tällöin*

$$|\hat{\sigma} - z| \leq \frac{p}{p+1} \operatorname{diam} \sigma.$$

Todistus. Jokaisella $j \in \{0, \dots, p\}$ saadaan

$$\begin{aligned}|v_j - \hat{\sigma}| &= |v_j - \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{p+1} v_i| \\ &\leq \sum_{i \neq j} |\frac{1}{p+1}(v_j - v_i)| \\ &\leq \frac{p}{p+1} \max |v_j - v_i| = \frac{p}{p+1} \operatorname{diam} \sigma.\end{aligned}$$

Näin ollen kuula $\overline{B}(\hat{\sigma}, \frac{p}{p+1} \operatorname{diam} \sigma)$ sisältää kaikki simpleksin σ kärkipisteet. Koska kyseinen kuula on konveksi, niin se sisältää koko simpleksin σ. □

Lemma 2.45. *Olkoot σ p-simpleksi ja τ sen ensimmäisen barysentrisen alijaon simpleksi. Tällöin*

$$\operatorname{diam} \tau \leq \frac{p}{p+1} \operatorname{diam} \sigma.$$

Todistus. Käytämme induktiota. Tapauksessa $p = 0$ tulos on triviaali. Oletetaan nyt, että $p > 0$ ja että väite pätee kaikilla lukua p pienemmillä dimensioilla. Olkoon σ p-simpleksi. Lemman 2.43 nojalla riittää osoittaa, että jos s ja s' ovat simpleksin σ sellaisia tahkoja, joilla $s' \subset s$, niin

$$|\hat{s} - \hat{s}'| \leq \frac{p}{p+1} \operatorname{diam} \sigma.$$

Jos s on σ itse, niin epäyhtälö seuraa lemmasta 2.44. Jos s on simpleksin σ aito tahko, joka on q-simpleksi, niin

$$|\hat{s} - \hat{s}'| \leq \frac{q}{q+1} \operatorname{diam} s \leq \frac{p}{p+1} \operatorname{diam} \sigma.$$

Ensimmäinen epäyhtälö seuraa induktio-oletuksesta ja toinen siitä tosiasiasta, että kuvaus $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ on kasvava, kun $x > 0$. □

Lause 2.46. *Olkoot K avaruuden $\mathbb{R}^n$ äärellinen simplisiaalinen kompleksi, d tausta-avaruuden $|K|$ metriikka ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen k, että kompleksin $\operatorname{sd}^k K$ jokaisen simpleksin halkaisija on pienempi kuin ε.*

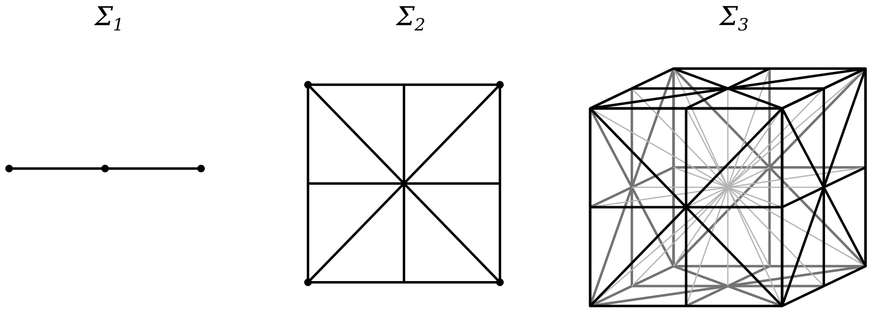
Todistus. Koska K on äärellinen, niin $|K|$ on kompakti. Jos siis valitaan avaruudelle $|K|$ kaksi metriikkaa d_1 ja d_2, niin identiteettikuvaus avaruudelta $(|K|, d_1)$ avaruudelle $(|K|, d_2)$ on tasaisesti jatkuva. Näin ollen jos $\varepsilon > 0$, niin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jokaisella joukolla $A \subseteq |K|$, jolla $d_1(A) < \delta$, pätee $d_2(A) < \varepsilon$. Siten on yhdentekevää, mitä metriikkaa käytämme tässä todistuksessa. Valitsemme käytettäväksi metriikaksi avaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollisen metriikan.

Olkoot kompleksin K dimensio m ja D kompleksin K simpleksien halkaisijoista suurin. Lemman 2.45 nojalla kompleksin K k. barysentrisen alijaon simpleksien halkaisijoista suurin on $(\frac{m}{m+1})^k D$. Jos k valitaan riittävän suureksi, niin tämä luku on pienempi kuin ε. □

Konstruoimme sitten n-kuution I^n standardikolmioinnin.

Määritelmä 2.47. Topologisen avaruuden X *kolmiointi* (engl. *triangulation*) on simplisiaalinen kompleksi K, jonka tausta-avaruus on homeomorfinen avaruuden X kanssa.

Kuution standardikolmiointi tapahtuu hyvin samankaltaisesti kuin simplisiaalisen kompleksin barysentrinen alijako. Kolmioinnin kärkipisteet ovat n-kuution kärkipisteet ja sen lisäksi n-kuution sivujen, tahkojen ja niiden ylempiulotteisten vastineiden keskelle lisätään kärkipisteet. Näillä kärkipisteillä viritetään sitten ylempiulotteiset simpleksit. Kuvassa 2.2 on esitetty 1-, 2- ja 3-kuutioiden standardikolmioinnit.



Kuva 2.2: 1-, 2- ja 3-kuutioiden standardikolmioinnit.

Määritelmä 2.48. Kuution I^n *tahkojen* joukoksi sanotaan joukkoa

$$
\begin{aligned}
S_n = \{\{\prod_{i=1}^{n} I_i \,|\, I_i = \{0\}\ \forall i \in J_0, I_i = \{1\}\ \forall i \in J_1, I_i = I \text{ muulloin}\}| \\
J_0, J_1 \subseteq \{1, \ldots, n\}, J_0 \cap J_1 = \varnothing\}.
\end{aligned}
$$

Joukon $\sigma \in S_n$ *painopisteeksi* sanotaan pistettä $\hat{\sigma} = (x_1, \ldots, x_n)$, missä $x_i = 0$, jos $I_i = \{0\}$, $x_i = 1$, jos $I_i = \{1\}$, ja $x_i = \frac{1}{2}$, jos $I_i = I$.

Nyt kuution I^n standardikolmiointi Σ_n määritellään siten, että jos

$$\sigma_0, \ldots, \sigma_k \in S_n,$$

niin simpleksi $\hat{\sigma}_0 \ldots \hat{\sigma}_k \in \Sigma_n$, jos ja vain jos $\sigma_0 \subset \cdots \subset \sigma_k$.

2.4 Hilbertin kuutio

Palautetaan nyt mieleen *Hilbertin kuution* $I^{\mathbb{N}}$ perusominaisuudet. Kuutio on metrinen avaruus, jonka metriikka on määritelty yksikkövälin I luonnollisen metriikan $|x - y|$ avulla

$$d(x, y) = \max_{j \in \mathbb{N}} \frac{|x_j - y_j|}{j}$$

ja kuutio on kompaktien avaruuksien tulona kompakti. Lisäksi sillä on sellainen käytännöllinen ominaisuus, että mikä tahansa metristyvä N_2-avaruus voidaan upottaa siihen.

Lause 2.49. [Vai15, lause 19.5] *Metristyvä N_2-avaruus voidaan upottaa Hilbertin kuutioon $I^{\mathbb{N}}$.*

Luku 3

Ositusavaruudet

Ositusavaruus eli *tekijäavaruus* on topologisesta avaruudesta pisteitä toistensa kanssa samaistamalla muodostettu toinen topologinen avaruus. Muodostamisen aluksi valitaan avaruudelle *ositus*.

Määritelmä 3.1. Olkoon X joukko. Kokoelma $G \subseteq \mathcal{P}(X)$ on joukon X *ositus* (engl. *partition* tai *decomposition*), jos $\varnothing \notin G$ ja kaikilla $g, h \in G$, joilla $g \neq h$, pätee $g \cap h = \varnothing$.

Annamme sitten ositukselle topologisen avaruuden rakenteen.

Määritelmä 3.2. Olkoot X topologinen avaruus ja G sen ositus. Osituksesta G tehdään topologinen avaruus määrittelemällä sen avoimet osajoukot siten, että joukko $U \subseteq G$ on avoin avaruudessa G, jos ja vain jos $\cup U \subseteq X$ on avoin avaruudessa X. Muodostettua avaruutta merkitään X/G ja kutsutaan avaruuden X *ositusavaruudeksi* (engl. *decomposition space*) tai *tekijäavaruudeksi* (engl. *quotient space*).

Samassa osituksen joukossa olevat pisteet on siis muodostetussa avaruudessa samaistettu keskenään. Määrittelemme sitten ositusavaruudelle *projektiokuvauksen*.

Määritelmä 3.3. Olkoot X topologinen avaruus ja G sen ositus. Tällöin määritellään kuvaus $\pi : X \to X/G$ kaavalla $x \mapsto g$, missä $x \in g \in G$. Tätä kuvausta kutsutaan ositusavaruuden X/G *projektiokuvaukseksi* (engl. *projection map*).

Koska osituksen joukot ovat erillisiä, niin jokainen $x \in X$ kuuluu vain yhteen $g \in G$, ja siten kuvaus on hyvin määritelty. Kuvaus on jatkuva, sillä $\pi^{-1}U = \cup U$ kaikilla $U \subseteq X/G$. Määrittelemme sitten saturoidun joukon käsitteen ja todistamme yhden siihen liittyvän proposition.

Määritelmä 3.4. Olkoot G avaruuden X ositus ja $\pi : X \to X/G$ ositusta vastaava projektiokuvaus. Avaruuden X osajoukkoa A sanotaan *G-saturoiduksi*, jos $\pi^{-1}(\pi(A)) = A$. Jos asiayhteydestä on selvää, minkä osituksen suhteen A on saturoitu, niin joukkoa A voidaan sanoa G-saturoidun sijaan vain *saturoiduksi*.

Propositio 3.5. *Olkoot G avaruuden X ositus ja $U \subseteq X$ avoin G-saturoitu joukko. Tällöin joukko $\pi(U)$ on avoin.*

Todistus. Saturoidun joukon määritelmän nojalla $\pi^{-1}\pi(U) = U$. Toisaalta $\pi^{-1}\pi(U) = \cup\pi(U)$, joten $\cup\pi(U) = U$. Siis joukko $\cup\pi(U)$ on avoin ja siten tekijäavaruuden X/G topologian määritelmän nojalla joukko $\pi(U)$ on avoin. □

3.1 Ylöspäin puolijatkuvat ositusavaruudet

Määrittelemme seuraavaksi *ylöspäin puolijatkuvan osituksen*. Kyseistä käsitettä tullaan hyödyntämään solumaisen osituksen määrittelyssä.

Määritelmä 3.6. Avaruuden X ositusta G sanotaan *ylöspäin puolijatkuvaksi* (engl. *upper semicontinuous*), jos jokainen $g \in G$ on kompakti ja jokaista $g \in G$ ja joukon g ympäristöä $U \subseteq X$ kohti on olemassa sellainen joukon g ympäristö $V \subseteq X$, että jokainen ympäristöä V leikkaava $g' \in G$ sisältyy ympäristöön U.

Seuraava lause karakterisoi ylöspäin puolijatkuvan osituksen.

Lause 3.7. *Olkoon G avaruuden X ositus suljetuiksi osajoukoiksi. Tällöin seuraavat väitteet ovat yhtäpitäviä:*

1. *jokaista osituksen G joukon g ympäristöä U kohti on olemassa sellainen toinen ympäristö V, että jokainen ympäristöä V leikkaava $g' \in G$ sisältyy joukkoon U,*

2. *jokaisella avoimella joukolla $U \subseteq G$ joukko $U^* = \bigcup\{g \in G \mid g \subseteq U\}$ on avoin,*

3. *projektiokuvaus $\pi : X \to X/G$ on suljettu.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $U \subseteq X$ on avoin ja ehto 1 pätee. Olkoon V_g jokaisella $g \in G$, jolla $g \subseteq U$, sellainen joukon g ympäristö, että jokainen ympäristöä V_g leikkaava $g' \in G$ sisältyy joukkoon U. Nyt $U^* = \cup_{g \subseteq U} V_g$, joten U^* on avointen joukkojen yhdisteenä avoin.

Oletetaan sitten, että joukko U^* on avoin jokaisella U, ja osoitetaan projektiokuvauksen $\pi : X \to X/G$ olevan suljettu. Olkoon F avaruuden X suljettu osajoukko. Koska $(X \setminus F)^*$ on saturoitu ja avoin, niin proposition 3.5 nojalla $\pi((X \setminus F)^*)$ on avoin. Nyt $\pi(X) = (X/G) \setminus \pi((X \setminus F)^*)$, joten $\pi(X)$ on avoimen joukon komplementtina suljettu.

Oletetaan lopuksi, että projektiokuvaus $\pi : X \to X/G$ on suljettu, ja osoitetaan ehdon 1 pätevän. Olkoot $g \in G$ ja $U \subseteq X$ joukon g ympäristö. Tällöin $X \setminus \pi^{-1}(\pi(X \setminus U))$ on haluttu ympäristö V. □

Ylöspäin puolijatkuvasta osituksesta muodostetun ositusavaruuden, toisin sanoen *ylöspäin puolijatkuvan ositusavaruuden*, projektio $\pi : X \to X/G$ on suljetun lisäksi ankara.

Määritelmä 3.8. Jatkuvaa kuvausta $f : X \to Y$ sanotaan *ankaraksi* (engl. *proper*), jos jokaisen kompaktin joukon $C \subseteq Y$ alkukuva kuvauksessa on kompakti.

Lause 3.9. *Olkoon G avaruuden X ylöspäin puolijatkuva ositus. Tällöin projektiokuvaus $\pi : X \to X/G$ on ankara.*

Todistus. Olkoot $C \subseteq X/G$ kompakti ja $\mathcal{P}$ joukon $\pi^{-1}C$ avoin peite avaruudessa X. Jokaista $g \in G$, joka sisältyy joukkoon $\pi^{-1}C$, kohti on olemassa sellainen äärellinen perhe $\{U_i^g \,|\, i = 1, \ldots, n_g\}$ peitteen $\mathcal{P}$ joukkoja, että $\{U_i^g\}_i$ on joukon $g \subseteq X$ peite. Joukko $\cup_i U_i^g$ sisältää saturoidun avoimen joukon $V_g \supseteq g$. Nämä avoimet joukot muodostavat joukon C peitteen $\{\pi(V_g)\}$. Nyt on olemassa sellainen äärellinen joukko $\Gamma \subseteq G$, että $\{\pi(V_g) \,|\, g \in \Gamma\}$ on joukon C peite. Tällöin äärellinen perhe

$$\{U_i^g \,|\, g \in \Gamma, i = 1, \ldots, n_g\}$$

avaruuden X avoimia joukkoja on joukon $\pi^{-1}C$ peite. Siis joukko $\pi^{-1}C$ on kompakti ja projektiokuvaus on osoitettu ankaraksi. □

Ylöspäin puolijatkuvalla ositusavaruudella on sellainen hyvä ominaisuus, että alkuperäisen avaruuden X Hausdorffin ominaisuus ja lokaali kompaktius periytyvät ositusavaruudelle X/G.

Lause 3.10. *Olkoon G Hausdorffin avaruuden X ylöspäin puolijatkuva ositus. Tällöin tekijäavaruus X/G on Hausdorff.*

Todistus. Olkoot $x, y \in X/G$ sellaiset, että $x \neq y$. Nyt koska $\pi^{-1}\{x\}$ ja $\pi^{-1}\{y\}$ ovat kompakteja ja erillisiä ja X on Hausdorffin avaruus, niin joukoilla $\pi^{-1}\{x\}$ ja $\pi^{-1}\{y\}$ on erilliset ympäristöt U ja V. Näin ollen $\pi(U^*)$ ja $\pi(V^*)$ ovat pisteiden x ja y erilliset ympäristöt. □

Määritelmä 3.11. Topologista avaruutta X sanotaan *lokaalisti kompaktiksi*, jos sen jokaisella pisteellä x on ympäristö U, joka on relatiivisesti kompakti eli jonka sulkeuma $\overline{U}$ on kompakti.

Lemma 3.12. *Olkoot X lokaalisti kompakti avaruus ja $C \subseteq X$ kompakti. Tällöin joukolla C on relatiivisesti kompakti ympäristö avaruudessa X.*

Todistus. Koska X on lokaalisti kompakti, niin jokaisella pisteellä $x \in X$ on relatiivisesti kompakti ympäristö U_x. Olkoon nyt $\mathcal{D} = \{U_x \,|\, x \in C\}$. Joukkoperhe $\mathcal{D}$ on selvästi joukon C avoin peite, joten koska C on kompakti, niin peitteellä $\mathcal{D}$ on äärellinen osapeite $\mathcal{P}$. Koska $\mathcal{P}$ on äärellinen, niin

$$\overline{\bigcup \mathcal{P}} = \overline{\bigcup_{V \in \mathcal{P}} V} = \bigcup_{V \in \mathcal{P}} \overline{V}$$

ja $\overline{\cup \mathcal{P}}$ on kompaktien joukkojen äärellisenä yhdisteenä kompakti. Siis $\cup \mathcal{P}$ on joukon C relatiivisesti kompakti ympäristö. □

Lause 3.13. *Olkoon G lokaalisti kompaktin Hausdorffin avaruuden X ylöspäin puolijatkuva ositus. Tällöin X/G on lokaalisti kompakti.*

Todistus. Olkoon $y \in X/G$. Koska G on ylöspäin puolijatkuva, niin $\pi^{-1}\{y\}$ on kompakti. Nyt lemman 3.12 nojalla joukolla $\pi^{-1}\{y\}$ on relatiivisesti kompakti ympäristö U. Koska $\overline{U}$ on kompakti ja π jatkuva, niin $\pi(\overline{U})$ on kompakti. Koska X on Hausdorff ja G ylöspäin puolijatkuva, niin X/G on Hausdorff. Näin ollen $\pi(\overline{U})$ on suljettu. Merkitään $U^* = \bigcup\{g \in G \,|\, g \subseteq U\}$ kuten lauseessa 3.7. Tälle joukolle pätee $U^* \subseteq \overline{U}$, joten $\pi(U^*) \subseteq \pi(\overline{U})$. Koska $\pi(\overline{U})$ on suljettu ja joukon $\pi(U^*)$ sulkeuma on suppein suljettu joukko, joka sisältää joukon $\pi(U^*)$, niin $\overline{\pi(U^*)} \subseteq \pi(\overline{U})$. Nyt siis $\overline{\pi(U^*)}$ on kompaktin joukon suljettuna osajoukkona kompakti. Koska joukko $\pi^{-1}(\pi(U^*)) = U^*$ on lauseen 3.7 nojalla avoin, niin tekijätopologian määritelmän nojalla $\pi(U^*)$ on avoin. Siis $\pi(U^*)$ on pisteen y relatiivisesti kompakti ympäristö. □

Myös säännöllisyys periytyy ylöspäin puolijatkuville ositusavaruuksille.

Lause 3.14. *Olkoon G säännöllisen avaruuden X ylöspäin puolijatkuva ositus. Tällöin tekijäavaruus X/G on säännöllinen.*

Todistus. Koska G on säännöllinen, se on Hausdorff, joten lauseen 3.10 nojalla tekijäavaruus X/G on Hausdorff. Siitä seuraa, että tekijäavaruus X/G on T_1-avaruus.

Olkoot $a \in X/G$ ja $B \subseteq X/G$ sellaiset, että B on suljettu ja $a \notin B$. Tällöin $\pi^{-1}\{a\}$ on kompakti ja $\pi^{-1}B$ on suljettu. Nyt koska X on säännöllinen ja siten T_3, niin jokaista pistettä $x \in \pi^{-1}\{a\}$ kohti on olemassa sellaiset erilliset avoimet joukot $U_x, V_x \subseteq X$, että $x \in U_x$ ja $B \subseteq V_x$. Koska $\pi^{-1}\{a\}$ on kompakti ja joukot U_x muodostavat sen avoimen peitteen, niin tällä peitteellä on äärellinen osapeite $\{U_x \mid x \in J\}$, missä $J \subseteq \pi^{-1}\{a\}$. Nyt siis $U = \cup_{x \in J} U_x$ on joukon $\pi^{-1}\{a\}$ ympäristö ja $V = \cap_{x \in J} V_x$ on joukon $\pi^{-1}B$ ympäristö ja U ja V ovat erilliset. Näin ollen joukot $\pi(U^*)$ ja $\pi(V^*)$ ovat pisteen a ja joukon B erilliset ympäristöt. Siten tekijäavaruuden X/G on osoitettu olevan T_3. □

Jopa metristyvyys periytyy ylöspäin puolijatkuvalle ositusavaruudelle. Tämän tuloksen ensimmäisenä todistajana pidetään yleisesti A. H. Stonea [Sto56]. Kyseinen tulos on kuitenkin sen verran syvällinen, että tyydymme todistamaan siitä vain erikoistapauksen, jossa avaruuden oletetaan metristyvän lisäksi olevan N_2.

Lause 3.15. *Oletetaan, että G on N_2-avaruuden X ylöspäin puolijatkuva ositus. Tällöin X/G on N_2-avaruus.*

Todistus. Olkoon $\mathcal{B}$ avaruuden X numeroituva kanta. Tällöin

$$\{\pi(U^*) \mid U \text{ on yhdiste äärellisestä määrästä kannan } \mathcal{B} \text{ joukkoja }\}$$

on tekijäavaruuden X/G numeroituva kanta. □

Hyödynnämme metristyvyyden periytymisen todistuksessa säännöllisyyden periytymistä ja seuraavaa metristyslausetta.

Lause 3.16. [Vai15, lause 19.5] *Oletetaan, että X on N_2-avaruus. Tällöin X on säännöllinen, jos ja vain jos se on metristyvä.*

Nyt olemme valmiit todistamaan N_2-avaruuden metristyvyyden periytymisen.

Lause 3.17. *Olkoon G metristyvän N_2-avaruuden X ylöspäin puolijatkuva ositus. Tällöin X/G on metristyvä N_2-avaruus.*

Todistus. Lauseen 3.16 nojalla X on säännöllinen, joten lauseen 3.14 nojalla X/G on säännöllinen. Lisäksi lauseen 3.15 nojalla X/G on N_2-avaruus. Siis soveltamalla uudelleen lausetta 3.16 saadaan, että X/G on metristyvä. □

3.2 Solumaiset ositusavaruudet

Solumainen ositusavaruus on ylöspäin puolijatkuva ositusavaruus, jonka osituksen joukkojen on täytettävä eräänlainen kutistuvuusehto. Tämän ansiosta solumaisilla ositusavaruuksilla on vielä parempia ominaisuuksia kuin puolijatkuvilla ositusavaruuksilla. Solumaisen osituksen joukoilta vaadittu kutistuvuusehto on seuraavanlainen.

Määritelmä 3.18. Avaruuden X kompaktia osajoukkoa C sanotaan *solumaiseksi avaruudessa* X (engl. *cell-like in* X), jos sen pystyy kutistamaan pisteeksi jokaisessa ympäristössään, eli jos jokaista osajoukon C ympäristöä $U \subseteq X$ kohti on olemassa piste $a \in U$ ja jatkuva kuvaus $F : C \times I \to U$, jolla pätee $F(x, 0) = x$ ja $F(x, 1) = a$ kaikilla $x \in C$.

Solumaisen joukon kutistuvuusehto antaa myös sen ympäristöille tietynlaisen löyhän kutistuvuusominaisuuden.

Lause 3.19. *Olkoon C ANR-avaruuden Y kompakti osajoukko. Tällöin C on solumainen avaruudessa Y, jos ja vain jos jokaista joukon C ympäristöä U kohti on olemassa toinen ympäristö $V \subseteq U$, joka on kutistuva ympäristössä U.*

Todistus. Oletetaan ensin, että C on solumainen avaruudessa Y ja $U \subseteq Y$ on joukon C ympäristö. Olkoon $\phi : C \times I \to U$ joukon C kutistus ympäristössä U ja olkoot

$$A = (C \times I) \cup (U \times \{0, 1\})$$

ja $a \in U$ se piste, johon ϕ kutistaa joukon C. Nyt siis kuvauksella ϕ pätee

$$\phi(C \times \{1\}) = \{a\}.$$

Määritellään kuvaus $f : A \to U$ kaavoilla $f(u, 0) = u$ ja $f(u, 1) = a$ kaikilla $u \in U$ ja $f(c, t) = \phi(c, t)$ kaikilla $c \in C$ ja $t \in I$. Proposition 2.3 nojalla U on ANR, joten f pystytään jatkamaan kuvaukseksi $F : W \to U$ joukon A ympäristöön W avaruudessa $U \times I$. Koska joukko C on kompakti, niin joukolla C on ympäristö V, jolla pätee $V \times I \subseteq W$. Tällöin kuvaus $F|V \times I$ on halutunlainen kutistus joukolle V.

Toinen suunta on helppo, sillä jos U on solumaisen joukon C ympäristö ja $V \subseteq U$ joukon C ympäristö, joka on kutistuva ympäristössä U, niin myös C on joukon V osajoukkona kutistuva ympäristössä U. $\square$

Määrittelemme nyt solumaisen osituksen *solumaisen joukon* käsitteen avulla.

Määritelmä 3.20. Metristyvän avaruuden X ylöspäin puolijatkuvaa ositusta G sanotaan *solumaiseksi*, jos jokainen $g \in G$ on solumainen avaruudessa X.

Luku 4

Hieno homotopiaekvivalenssi

Tässä luvussa todistamme, että jos avaruus ja siitä muodostettu solumainen ositusavaruus ovat molemmat kompakteja ANR-avaruuksia, niin ne ovat *hienosti homotopiaekvivalentit* keskenään. Tämän todistaminen vaatii kuitenkin useamman lemman, jotka todistamme aluksi. Tarvitsemme lemmoja varten seuraavan pienen tuloksen.

Lemma 4.1. *Kompakti metristyvä avaruus on N_2.*

Todistus. Olkoon X kompakti metristyvä avaruus ja d jokin sen metriikka. Merkitään $\mathcal{D}_n = \{B(x, \frac{1}{n}) \mid x \in X\}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt koska X on kompakti ja joukkoperheet $\mathcal{D}_n$ ovat sen avoimia peitteitä, niin jokaisella $\mathcal{D}_n$ on äärellinen osapeite $\mathcal{P}_n$. Näiden osapeitteiden yhdiste $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ on avaruuden X numeroituva kanta. □

Ensimmäinen lemmoista antaa kahden toisiaan lähellä olevan kuvauksen välille homotopian, jossa pisteiden radat ovat pienempiä kuin annettu luku ε. Ainoa ehto on, että kuvausten maalijoukon on oltava kompakti ANR-avaruus.

Lemma 4.2. *Olkoot Y kompakti ANR-avaruus ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $\delta > 0$, että jos S on mielivaltainen avaruus, niin minkä tahansa kahden kuvauksen $h_0, h_1 : S \to Y$, joilla $d(h_0(s), h_1(s)) < \delta$ kaikilla $s \in S$, välille on olemassa homotopia $H : S \times I \to Y$, jolla pätee $H(s, 0) = h_0(s)$, $H(s, 1) = h_1(s)$ ja $\operatorname{diam} H(\{s\} \times I) < \varepsilon$ kaikilla $s \in S$.*

Todistus. Lauseen 2.49 nojalla avaruus Y voidaan upottaa Hilbertin kuutioon $I^{\mathbb{N}}$. Samaistetaan nyt Y tähän Hilbertin kuution homeomorfiseen osajoukkoon. Koska Y on kompakti, niin tämä homeomorfinen joukko on kompakti ja koska Hilbertin kuutio on Hausdorff, niin tämä homeomorfinen joukko on suljettu Hilbertin kuutiossa. Koska Y on lisäksi ANR-avaruus, niin se on kuutiossa jonkin ympäristönsä U retrakti. Olkoon $R : U \to Y$ tätä retraktia vastaava retraktio. Hilbertin kuutio on metrisenä avaruutena T_4-avaruus, joten suljetulla joukolla Y on siellä ympäristö V, jolla pätee $\overline{V} \subseteq U$. Koska Hilbertin kuutio on kompakti, niin kompaktin joukon suljettuna osajoukkona $\overline{V}$ on kompakti. Nyt siis kuvaus R on tasaisesti jatkuva joukossa $\overline{V}$, joten voidaan valita sellainen $\delta > 0$, että $N(Y;\delta) \subseteq V$ ja $\operatorname{diam} R(Z) < \varepsilon$ kaikilla $Z \subseteq N(Y;\delta)$, joiden halkaisija on pienempi kuin δ. Olkoon $H : S \times I \to Y$ kuvaus $(x,t) \mapsto R(th_0(x) + (1-t)h_1(x))$. Jos $s \in S$, niin oletuksen nojalla $d(h_0(s), h_1(s)) < \delta$, joten $\operatorname{diam} H(\{s\} \times I) < \varepsilon$. Siis H on halutunlainen homotopia. $\square$

Esittelemme nyt UV^n-ominaisuuden ja UV^n-osituksen käsitteet. Ne liittyvät läheisesti solumaisuuteen.

Määritelmä 4.3. Olkoot X topologinen avaruus, A avaruuden X osajoukko ja $n \in \mathbb{N}_0$. Tällöin sanotaan, että joukolla A on *ominaisuus* n-UV, jos jokaista joukon A ympäristöä U kohti on olemassa sellainen joukon A ympäristö $V \subseteq U$, että jokaisella jatkuvalla kuvauksella $f : \partial\overline{B}^{n+1} \to V$ on jatkuva jatke $F : \overline{B}^{n+1} \to U$. Jos joukolla A on ominaisuus k-UV kaikilla $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, niin sanotaan, että joukolla A on *ominaisuus* UV^n.

Määritelmä 4.4. Jos avaruuden X ylöspäin puolijatkuvalle ositukselle G pätee, että kaikilla $g \in G$ on ominaisuus UV^n avaruudessa X, niin sanotaan, että G on UV^n*-ositus.*

Lauseen 3.19 avulla saadaan, että ANR-avaruuden solumaisella osajoukolla on ominaisuus n-UV kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. Tämän todistamiseen tarvitsemme kuitenkin ensin topologisen avaruuden *kartion* käsitteen ja erään siihen liittyvän lemman.

Määritelmä 4.5. Topologisen avaruuden X *kartioksi* (engl. *cone*) sanotaan avaruuden $X \times I$ tekijäavaruutta, jossa joukon $X \times \{0\}$ pisteet on samaistettu keskenään ja muita pisteitä ei ole samaistettu. Kartiosta käytetään merkintää CX.

Lemma 4.6. *Olkoot $n \in \mathbb{N}$ ja $\pi : \partial\overline{B}^n \times I \to C(\partial\overline{B}^n)$ kartion $C(\partial\overline{B}^n)$ tekijäkuvaus. Tällöin on olemassa homeomorfismi $f : \overline{B}^n \to C(\partial\overline{B}^n)$, jolla pätee $f(x) = \pi(x, 1)$ kaikilla $x \in \partial\overline{B}^n$.*

Todistus. Määritellään kuvaus $f : \overline{B}^n \to C(\partial\overline{B}^n)$ kaavalla $x \mapsto \pi(\frac{x}{|x|}, |x|)$. Nyt $\left|\frac{x}{|x|}\right| = 1$, joten $\frac{x}{|x|} \in \partial\overline{B}^n$ kaikilla $x \in \overline{B}^n$. Lisäksi $0 \leq |x| \leq 1$ kaikilla $x \in \overline{B}^n$. Siis kuvaus f on hyvin määritelty. Lisäksi kuvaus f on jatkuvien kuvausten yhdisteenä jatkuva.

Määritellään sitten kuvaus $g : C(\partial\overline{B}^n) \to \overline{B}^n$ kaavalla $\pi(x,t) \mapsto tx$. Nyt jos $x_1, x_2 \in \partial\overline{B}^n$, niin $g(\pi(x_1,0)) = 0 \cdot x_1 = 0 = 0 \cdot x_2 = g(\pi(x_2,0))$, joten kuvaus g on hyvin määritelty. Kuvaus $G : \partial\overline{B}^n \times I \to \overline{B}^n$, $(x,t) \mapsto tx$, on jatkuva, joten koska kaavio

$$\begin{tikzcd}
\partial\overline{B}^n \times I \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "G"] & \\
C(\partial\overline{B}^n) \arrow[r, "g"] & \overline{B}^n
\end{tikzcd}$$

kommutoi ja π on samastuskuvaus, niin kuvaus g on jatkuva.

Olkoon $x \in \overline{B}^n$. Huomataan, että

$$g(f(x)) = g(\pi(\tfrac{x}{|x|}, |x|)) = |x| \cdot \tfrac{x}{|x|} = x.$$

Näin ollen $g \circ f = \mathrm{id}_{\overline{B}^n}$.

Olkoon sitten $x \in \partial\overline{B}^n$ ja $t \in I$. Tällöin koska $|x| = 1$ ja $|t| = t$, niin saadaan

$$f(g(\pi(x,t))) = f(tx) = \pi(\tfrac{tx}{|tx|}, |tx|) = \pi(\tfrac{tx}{t|x|}, |t| \cdot |x|) = \pi(\tfrac{x}{|x|}, t) = \pi(x,t).$$

Siis $f \circ g = \mathrm{id}_{C(\partial\overline{B}^n)}$. Olemme siis todistaneet, että $g = f^{-1}$. Näin ollen kuvaus f on bijektio.

Olkoon nyt $x \in \partial\overline{B}^n$. Tällöin

$$f(x) = \pi(\tfrac{x}{|x|}, |x|) = \pi(x,1),$$

sillä $|x| = 1$. Nyt kaikki lauseen väitteet on todistettu. $\square$

Lause 4.7. *Jokaisella ANR-avaruuden Y solumaisella osajoukolla A on ominaisuus n-UV kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$.*

Todistus. Olkoot $A \subseteq Y$ solumainen ja $n \in \mathbb{N}_0$. Olkoot $U \subseteq Y$ joukon A ympäristö ja $f : \partial\overline{B}^{n+1} \to V$ jatkuva kuvaus.

Koska joukko A on solumainen, niin lauseen 3.19 nojalla joukolla A on toinen ympäristö $V \subseteq U$, joka on kutistuva ympäristössä U. Tämä tarkoittaa, että on olemassa alkio $a \in U$ ja jatkuva kuvaus $H : V \times I \to U$, joilla pätee $H(v,0) = v$ ja $H(v,1) = a$ kaikilla $v \in V$. Olkoon $\pi : \partial\overline{B}^{n+1} \times I \to C(\partial\overline{B}^{n+1})$ kartion $C(\partial\overline{B}^{n+1})$ tekijäkuvaus. Määritellään kuvaus $g : C(\partial\overline{B}^{n+1}) \to U$ kaavalla $\pi(x,t) \mapsto H(f(x), 1-t)$. Kuvaus on hyvin määritelty, sillä jos $x_1, x_2 \in \partial\overline{B}^{n+1}$, niin

$$g(\pi(x_1,0)) = H(f(x_1),1) = a = H(f(x_2),1) = g(\pi(x_2,0)).$$

Kuvaus $G : \partial\overline{B}^{n+1} \times I \to U$, $(x,t) \mapsto H(f(x), 1-t)$, on jatkuvien kuvausten yhdisteenä jatkuva, joten koska kaavio

$$\begin{tikzcd} \partial\overline{B}^{n+1} \times I \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "G"] & \\ C(\partial\overline{B}^{n+1}) \arrow[r, "g"] & U \end{tikzcd}$$

kommutoi ja π on samastuskuvaus, niin kuvaus g on jatkuva. Lemman 4.6 nojalla on olemassa homeomorfismi $\phi : \overline{B}^{n+1} \to C(\partial\overline{B}^{n+1})$, jolla pätee $g(\phi(x)) = g(\pi(x,1)) = H(f(x),0) = f(x)$ kaikilla $x \in \partial\overline{B}^{n+1}$. Siis kuvaus $g \circ \phi : \overline{B}^{n+1} \to U$ on kuvauksen f jatkuva jatke. Näin ollen on osoitettu, että joukolla A on ominaisuus n-UV kaikilla $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

Esittelemme nyt *n-homotopiatähtitihennyksen* käsitteen. Siinä vahvennetaan tähtitihennyksen käsitteen ehtoja UV^n-ominaisuuden hengessä.

Määritelmä 4.8. Kutsumme avaruuden X osajoukkojen kokoelmaa $\mathcal{P}$ avaruuden X osajoukkojen kokoelman $\mathcal{D}$ *n-homotopiatähtitihennykseksi* (engl. *n-homotopy star refinement*), jos jokaista $U \in \mathcal{P}$ kohti on olemassa $V \in \mathcal{D}$, jolla pätee

1. $\mathrm{St}(U,\mathcal{P}) \subseteq V$ ja
2. jokaisella jatkuvalla kuvauksella $f : \partial\overline{B}^{k+1} \to \mathrm{St}(U,\mathcal{P})$ on jatkuva jatke $F : \overline{B}^{k+1} \to V$ jokaisella $k \in \{0,1,\cdots,n\}$.

Hyödyntämällä tietoa, että metristyvän avaruuden jokaisella avoimella peitteellä on tähtitihennys, saadaan seuraava lemma.

Lemma 4.9. *Olkoot X metristyvä avaruus, $n \in \mathbb{N}_0$, G avaruuden X UV^n-ositus, Z tekijäavaruuden X/G osajoukko ja $\mathcal{U}$ joukon Z avoin peite avaruudessa X/G. Tällöin on olemassa sellainen joukon Z avoin peite $\mathcal{W}$ avaruudessa X/G, että $\pi^{-1}\mathcal{W}$ n-homotopiatähtitihentää peitettä $\pi^{-1}\mathcal{U}$.*

Todistus. Olkoon $z \in Z$. Koska $\mathcal{U}$ on joukon Z peite, niin on olemassa $U_z \in \mathcal{U}$, jolla $z \in U_z$. Tällöin $\pi^{-1}U_z$ on avoin joukko, joka sisältää joukon $\pi^{-1}\{z\}$. Koska jokaisella osituksen G joukolla on UV^n-ominaisuus, niin on olemassa avoin joukko $V_z \subseteq X$, jolla $\pi^{-1}\{z\} \subseteq V_z \subseteq \pi^{-1}U_z$ ja jokaisella kuvauksella $f : \partial\overline{B}^{k+1} \to V_z$ on jatkuva jatke $F : \overline{B}^{k+1} \to \pi^{-1}U_z$ kaikilla $0 \leq k \leq n$. Koska G on ylöspäin puolijatkuva ja $\pi^{-1}\{z\} \subseteq V_z$, niin voimme olettaa, että V_z on yhdiste perheen G joukoista. Siten $\pi(V_z)$ on avoin joukko, joka sisältää pisteen z. Olkoon $\mathcal{V} = \{\pi(V_z) \,|\, z \in Z\}$. Nyt $\mathcal{V}$ on joukon Z avoin peite.

Koska X on metristyvä, niin tekijäavaruus X/G on metristyvä, joten peitteellä $\mathcal{V}$ on avoin tähtitihennys $\mathcal{W}$. Nyt peite $\pi^{-1}\mathcal{W}$ tähtitihentää peitettä $(V_z)_{z\in Z}$ ja peite $(V_z)_{z\in Z}$ tihentää peitettä $\{\pi^{-1}U_z \mid z \in Z\}$. Tästä seuraa, että peite $\pi^{-1}\mathcal{W}$ n-homotopiatähtitihentää peitettä $\pi^{-1}\mathcal{U}$. □

Sitten pääsemme viimein todistamaan toista hienon homotopiaekvivalenssin osoittamiseen tarvittavista lemmoista.

Lemma 4.10. *Olkoot X metristyvä avaruus, $n \in \mathbb{N}$, G avaruuden X UV^{n-1}-ositus, d ositusavaruuden X/G metriikka, K äärellinen simplisiaalinen n-kompleksi, L kompleksin K alikompleksi, $f : K \to X/G$ ja $F_L : L \to X$ sellainen kuvaus, että $\pi F_L = f|L$. Tällöin jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa kuvaus $F : K \to X$, jolla pätee, että $F|L = F_L$ ja $d(f(x), \pi F(x)) < \varepsilon$ kaikilla $x \in K$.*

Todistus. Koska $(X/G, d)$ on metrinen avaruus, niin jokaista $z \in f(K)$ kohti on olemassa sellainen G-saturoitu avoin osajoukko $U_z \subseteq X$, että $z \in \pi(U_z)$ ja $\operatorname{diam} \pi(U_z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nämä avoimet osajoukot muodostavat joukon $\pi^{-1}f(K)$ G-saturoidun avoimen peitteen $\mathcal{U}_n = \{U_z \mid z \in f(K)\}$. Soveltamalla lemmaa 4.9 toistuvasti saadaan joukolle $\pi^{-1}f(K)$ sellaiset avoimet G-saturoidut peitteet $\mathcal{U}_{n-1}, \ldots, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_0$, että peite $\mathcal{U}_i$ $(n-1)$-homotopiatähtitihentää peitettä $\mathcal{U}_{i+1}$ kaikilla $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.

Lauseen 2.46 nojalla kompleksilla K on alijako K', jossa jokaista simpleksiä $\sigma \in K'$ kohti on olemassa $U^0_\sigma \in \mathcal{U}_0$, jolla pätee $f(\sigma) \subseteq \pi(U^0_\sigma)$. Merkitään kirjaimella K tästä edespäin tätä alijakoa.

Luodaan nyt kuvaukselle F_L yksi kerrallaan jatkeet $F_i : L \cup K^{(i)} \to X$ kaikilla $i \in \{0, \ldots, n\}$. Ensin jatketaan kuvaus F_L avaruuden $L \cup K^{(0)}$ yli kuvaukseksi F_0 siten, että jos $v \in K^{(0)}$, niin asetetaan $F_0(v) = x$ jollain $x \in X$, jolla $\pi(x) = f(v)$.

Jos σ on kompleksin K 1-simpleksi ja $U^0_\sigma \in \mathcal{U}_0$ se peitteen alkio, jolle pätee $f(\sigma) \subseteq \pi(U^0_\sigma)$, niin havaitaan, että $F_0(\partial\sigma) \subseteq U^0_\sigma$. Koska peite $\mathcal{U}_0$ $(n-1)$-homotopiatähtitihentää peitettä $\mathcal{U}_1$, niin jokaisella kompleksin K 1-simpleksillä σ kuvaus $F_0|\partial\sigma$ pystytään jatkamaan jatkuvaksi kuvaukseksi $F^\sigma_1 : \sigma \to U_\sigma$, missä $U_\sigma \in \mathcal{U}_1$. Siis yhdistämällä nämä jatkeet saadaan kuvaukselle F_0 jatkuva jatke $F_1 : L \cup K^{(1)} \to X$, jolla $F_1|\partial\sigma = F_0|\partial\sigma$ ja $F_1(\sigma)$ sisältyy johonkin peitteen $\mathcal{U}_1$ alkioon kaikilla kompleksin K 1-simplekseillä σ.

Oletetaan nyt, että $1 \leq i < n$ ja että olemme jo muodostaneet kuvauksen F_L jatkeen $F_i : L \cup K^{(i)} \to X$, jolla pätee, että $F_i|L \cup K^{(0)} = F_0$ ja että jokaista $\sigma \in K^{(i)}$ kohti on olemassa peitteen $\mathcal{U}_i$ alkio U^i_σ, jolla $F_i(\sigma) \subseteq U^i_\sigma$.

Olkoon σ kompleksin K $(i+1)$-simpleksi ja γ jokin simpleksin τ reunan simpleksi. Nyt jollain $U^i_\gamma \in \mathcal{U}_i$ pätee $F_i(\gamma) \subseteq U^i_\gamma$. Havaitaan, että $F_i(\partial\tau) \subseteq$

$\mathrm{St}(U^i_\gamma, \mathcal{U}_i)$. Koska peite $\mathcal{U}_i$ $(n-1)$-homotopiatähtitihentää peitettä $\mathcal{U}_{i+1}$, niin kuvaus $F_i|\partial\tau$ voidaan jatkaa siten, että se kuvaa joukon τ jollekin peitteen $\mathcal{U}_{i+1}$ alkioista. Yhdistämällä kaikki nämä kuvausten $F_i|\partial\tau$ jatkeet kompleksin K $(i+1)$-simplekseille τ saadaan kuvaukselle F_i sellainen jatkuva jatke $F_{i+1} : L \cup K^{(i+1)} \to X$, että jos $\tau \in K^{(i+1)}$, niin joukko $F_{i+1}(\tau)$ sisältyy johonkin peitteen $\mathcal{U}_{i+1}$ joukoista.

Haettu kuvaus $F : K \to X$ on nyt viimeisenä muodostettava kuvaus F_n. Vielä täytyy kuitenkin osoittaa, että πF on riittävän lähellä kuvausta f. Olkoot x piste kompleksissa K ja σ sellainen simpleksi, että $x \in \sigma \in K$. Kuvauksen F konstruktion ansiosta pätee $F(\sigma) \subseteq U^n_\sigma \in \mathcal{U}_n$, joten $\mathrm{diam}(\pi F(\sigma)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sen lisäksi on olemassa sellainen $U \in \mathcal{U}_n$, että $f(\sigma) \subseteq \pi(U)$, joten myös $\mathrm{diam}\, f(\sigma) < \frac{\varepsilon}{2}$. Valitaan simpleksistä σ kärkipiste v, jolloin käyttämällä tietoa $\pi F(v) = f(v)$ saadaan

$$d(f(x), \pi F(x)) \leq d(f(x), f(v)) + d(\pi F(v), \pi F(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tämä päättää todistuksen. $\square$

Käyttämällä vastaavanlaisia tekniikoita saadaan toinen tarvittava samankaltainen lemma.

Lemma 4.11. *Olkoot (X, d) metrinen avaruus, $n \in \mathbb{N}_0$, G avaruuden X UV^n-ositus, K äärellinen simplisiaalinen n-kompleksi, L kompleksin K alikompleksi, $f : K \to X/G$ ja $F_L : L \to X$ sellainen kuvaus, että $\pi F_L = f|L$. Tällöin jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että mitä tahansa kahta kuvauksen F_L jatkuvaa jatketta $\alpha_0, \alpha_1 : K \to X$, joilla pätee $d(f(x), \pi\alpha_i(x)) < \delta$ kaikilla $x \in K$, kohti on olemassa homotopia $h : K \times I \to X$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:*

1. *$h(x, 0) = \alpha_0(x)$ ja $h(x, 1) = \alpha_1(x)$ kaikilla $x \in K$,*
2. *$h(x, t) = F_L(x)$ kaikilla $x \in L$ ja $t \in I$ ja*
3. *$d(f(x), \pi h(x, t)) < \varepsilon$ kaikilla $x \in K$ ja $t \in I$.*

Todistus. Koska $(X/G, d)$ on metrinen avaruus, niin jokaista $z \in f(K)$ kohti on olemassa sellainen G-saturoitu avoin osajoukko $U_z \subseteq X$, että $z \in \pi(U_z)$ ja $\mathrm{diam}\, \pi(U_z) < \frac{\varepsilon}{2}$. Nämä avoimet osajoukot muodostavat joukon $\pi^{-1} f(K)$ G-saturoidun avoimen peitteen. Nyt koska K on äärellinen kompleksi, niin lauseen 2.38 nojalla K on kompakti. Lauseen 3.9 nojalla projektiokuvaus π on ankara, joten koska lisäksi f on jatkuva, niin joukko $\pi^{-1} f(K)$ on kompakti. Siis edellä mainitulla peitteellä on äärellinen osapeite. Merkitään tätä osapeitettä $\mathcal{U}_{n+1}$. Soveltamalla lemmaa 4.9 toistuvasti saadaan joukolle

$\pi^{-1}f(K)$ sellaiset äärelliset avoimet G-saturoidut peitteet $\mathcal{U}_n, \dots, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_0$, että peite $\mathcal{U}_i$ n-homotopiatähtitihentää peitettä $\mathcal{U}_{i+1}$ kaikilla $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Merkitään $U_{i1}, U_{i2}, \dots, U_{im_i}$ peitteen $\mathcal{U}_i$ joukkoja.

Lauseen 2.46 nojalla kompleksilla K on alijako K', jossa jokaista simpleksiä $\sigma \in K'$ kohti on olemassa $U_\sigma^0 \in \mathcal{U}_0$, jolla pätee $f(\sigma) \subseteq \pi(U_\sigma^0)$. Merkitään kirjaimella K tästä edespäin tätä alijakoa.

Valitaan nyt luku $\delta > 0$ siten, että $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ ja jos σ on kompleksin K simpleksi, $1 \leq j \leq m_0$ ja $f(\sigma) \subseteq \pi(U_{0j})$, niin $N(f(\sigma); \delta) \subseteq \pi(U_{0j})$. Huomaa, että nyt jos τ on kompleksin K simpleksi, $1 \leq j \leq m_0$ ja $f(\tau) \subseteq \pi(U_{0j})$, niin luvun δ valinnan ansiosta $\pi(\alpha_0(\tau)) \subseteq \pi(U_{0j})$ ja $\pi(\alpha_1(\tau)) \subseteq \pi(U_{0j})$.

Olkoon $K' = (K \times \{0, 1\}) \cup (L \times I)$. Määritellään kuvaus $h' : K' \to X$ kaavoilla

$$h'(x, 0) = \alpha_0(x) \text{ ja } h'(x, 1) = \alpha_1(x), \text{ jos } x \in K,$$

$$h'(x, t) = F_L(x), \text{ jos } x \in L \text{ ja } t \in I.$$

Luodaan nyt kuvaukselle h' yksi kerrallaan jatkeet $h_i : (K^{(i)} \times I) \cup K' \to X$ kaikilla $i \in \{0, \dots, n\}$. Luodaan ensin jatke h_0.

Olkoon v kompleksin K kärkipiste, joka ei kuulu alikompleksiin L. Kuten yllä huomattiin, niin U_{0j} sisältää molemmat $\pi(\alpha_0(v))$ ja $\pi(\alpha_1(v))$ jollain j. Koska $\mathcal{U}_0$ n-homotopiatähtitihentää peitettä $\mathcal{U}_1$, niin kuvaus $h'|(\{v\} \times \{0, 1\})$ voidaan jatkaa siten, että jatke kuvaa joukon $\{v\} \times I$ johonkin peitteen $\mathcal{U}_1$ joukoista. Huomaa, että jos v kuuluu alikompleksiin L, niin $\{v\} \times I \subseteq K'$. Edellä mainitulla tavalla muodostamme kuvauksen h' jatkuvan jatkeen

$$h_0 : (K^{(0)} \times I) \cup K' \to X.$$

Kuvauksella h_0 on nyt ominaisuus, että jos σ on kompleksin K simpleksi, joka sisältyy joukkoon $K^{(0)} \cup L$, niin $h_0(\sigma \times I)$ sisältyy johonkin peitteen $\mathcal{U}_1$ joukoista.

Oletetaan sitten, että $0 \leq i < n$ ja että olemme jo muodostaneet kuvauksen h' jatkeen $h_i : (K^{(i)} \times I) \cup K' \to X$, jolla pätee, että jos τ on kompleksin K simpleksi joukossa $K^{(i)} \cup L$, niin $h_i(\tau \times I)$ sisältyy johonkin peitteen $\mathcal{U}_{i+1}$ joukoista.

Olkoon σ kompleksin K $(i+1)$-simpleksi, joka ei sisälly alikompleksiin L. Tällöin h_i on määritelty joukossa $(\sigma \times \{0, 1\}) \cup (\partial\sigma \times I)$. Lisäksi jos j on sellainen, että $f(\sigma) \subseteq \pi(U_{(i+1)j})$, niin

$$h_i((\sigma \times \{0, 1\}) \cup (\partial\sigma \times I)) \subseteq \mathrm{St}(U_{(i+1)j}, \mathcal{U}_{i+1}).$$

Koska $\mathcal{U}_{i+1}$ n-homotopiatähtitihentää peitettä $\mathcal{U}_{i+2}$, niin kuvaus

$$h_i|[(\sigma \times \{0, 1\}) \cup (\partial\sigma \times I)]$$

voidaan jatkaa siten, että se kuvaa joukon $\sigma \times I$ jollekin peitteen $\mathcal{U}_{i+2}$ joukoista. Jälleen jos σ on alikompleksin L $(i+1)$-simpleksi, niin $\sigma \times I \subseteq K'$. Siis kuvauksella h_i on sellainen jatkuva jatke $h_{i+1} : (K^{(i+1)} \times I) \cup K' \to X$, että jos τ on alikompleksin $K^{(i+1)} \cup L$ simpleksi, niin $h_{i+1}(\tau \times I)$ sisältyy johonkin peitteen $\mathcal{U}_{i+2}$ joukoista.

Kuvaus $h_n : K \times I \to X$ on siis kuvauksen h' jatkuva jatke, jolla jokaisella kompleksin K simpleksillä joukko $h_n(\sigma \times I)$ sisältyy johonkin peitteen $\mathcal{U}_{n+1}$ joukoista. Merkitään nyt $h = h_n$.

Osoitamme sitten, että $d(f(x), \pi(h(x,t))) < \varepsilon$ kaikilla $x \in K$ ja $t \in I$. Olkoot $t \in I$, x piste kompleksissa K ja σ sellainen kompleksin K simpleksi, että $x \in \sigma$. Tällöin jollain j pätee $h(\sigma \times I) \subseteq U_{(n+1)j}$, joten $h(x,0) \in U_{(n+1)j}$ ja $h(x,t) \in U_{(n+1)j}$. Näin ollen $\pi(h(x,0)) \in \pi(U_{(n+1)j})$ ja $\pi(h(x,t)) \in \pi(U_{(n+1)j})$. Peitteen $\mathcal{U}_{n+1}$ konstruktion ansiosta $\operatorname{diam} \pi(U_{(n+1)j}) < \frac{\varepsilon}{2}$ ja oletuksen nojalla $d(f(x), \pi(\alpha_0(x))) < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$, joten

$$\begin{aligned} d(f(x), \pi(h(x,t))) &\leq d(f(x), \pi(h(x,0))) + d(\pi(h(x,0)), \pi(h(x,t))) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tämä todistaa väitteen. □

Neljäs luvun päätuloksen lemmoista on lyhyempi ja antaa meille tietynlaisen äärellisen simplisiaalisen kompleksin, jota tulemme tarvitsemaan.

Lemma 4.12. *Olkoot S Hilbertin kuution $I^{\mathbb{N}}$ kompakti osajoukko ja W joukon S ympäristö. Olkoon $\eta > 0$. Tällöin on olemassa sellainen kokonaisluku $k > 0$ ja äärellinen simplisiaalinen kompleksi $P \subseteq I^k$, että*

$$S \subseteq P \times Q_k \subseteq N(S;\eta) \cap W \text{ ja } \operatorname{diam}(\{z\} \times Q_k) < \eta \text{ kaikilla } z \in I^k,$$

missä $Q_k = I^{\mathbb{N}}$.

Todistus. Koska joukkoperhe

$$\mathcal{B} = \{U_1 \times \cdots \times U_j \times I^{\mathbb{N}} \mid j \in \mathbb{N}, U_i \subset I \text{ avoin kaikilla } i \in \{1, \dots, j\}\}$$

on Hilbertin kuution kanta, niin joukkoperhe

$$\mathcal{D} = \{U \in \mathcal{B} \mid U \subseteq N(S;\eta) \cap W\}$$

on joukon $N(S;\eta) \cap W$ peite. Koska joukko S on kompakti ja $\mathcal{D}$ sen avoin peite, niin peitteellä $\mathcal{D}$ on äärellinen osapeite $\mathcal{D}'$. Olkoon nyt $k_0 > 0$ sellainen, että $\operatorname{pr}_i(U) = I$ kaikilla $i > k_0$ ja $U \in \mathcal{D}'$. Olkoon lisäksi $k_1 > 0$ sellainen, että $\frac{1}{k_1} < \eta$. Merkitään $k = \max\{k_0, k_1\}$. Tällöin siis $\frac{1}{k} < \eta$ ja $\mathrm{pr}_i(U) = I$ kaikilla $i > k$ ja $U \in \mathcal{D}'$. Näin ollen jos $z \in I^k$, niin

$$\mathrm{diam}(\{z\} \times Q_k) = \max_{j>k} \frac{\mathrm{diam}(I)}{j} = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} < \eta.$$

Merkitään sitten

$$V = \bigcup \{U_1 \times \cdots \times U_k \,|\, U_1 \times \cdots \times U_k \times I^{\mathbb{N}} \in \mathcal{D}'\}$$

ja

$$A = \{(\mathrm{pr}_1(x), \mathrm{pr}_2(x), \cdots, \mathrm{pr}_k(x)) \,|\, x \in S\}.$$

Tällöin V on avointen joukkojen yhdisteenä avoin ja A on kompaktin joukon kuvana jatkuvassa kuvauksessa $x \mapsto (\mathrm{pr}_1(x), \ldots, \mathrm{pr}_k(x))$ kompakti. Lisäksi $A \subseteq V$. Nyt koska A on kompakti ja $I^k \setminus V$ suljettu, niin $d(A, I^k \setminus V) > 0$. Merkitään tätä etäisyyttä symbolilla e.

Olkoon K kuution I^k kolmiointi kuten määritelmässä 2.48. Lauseen 2.46 nojalla on olemassa $m \in \mathbb{N}$, jolla pätee, että alijaon $\mathrm{sd}^m K$ simpleksien halkaisijat ovat alle e. Nyt alijaon $\mathrm{sd}^m K$ joukkoa A leikkaavat simpleksit tahkoineen muodostavat alijaon $\mathrm{sd}^m K$ alikompleksin P. Huomataan, että $P \subseteq V$, sillä kompleksin P simpleksien halkaisijat ovat alle $e = d(A, I^k \setminus V)$ ja kaikki kompleksin P simpleksit leikkaavat joukkoa A. Siis P on halutunlainen simplisiaalinen kompleksi. □

Olemme nyt valmiit todistamaan luvun päätuloksen. Annamme ensin kuitenkin hienon homotopiaekvivalenssin täsmällisen määritelmän.

Määritelmä 4.13. Olkoon $\mathcal{P}$ avaruuden Y avoin peite. Jatkuvien kuvausten $f, g : X \to Y$ sanotaan olevan $\mathcal{P}$-*homotooppisia*, jos niiden välille on olemassa homotopia $h : X \times I \to Y$, jolla pätee, että jokaisella $x \in X$ joukko $h(\{x\} \times I)$ sisältyy johonkin peitteen $\mathcal{P}$ alkioon U_x.

Määritelmä 4.14. Jatkuvan kuvauksen $f : X \to Y$ sanotaan olevan *hieno homotopiaekvivalenssi*, jos jokaista avaruuden Y avointa peitettä $\mathcal{P}$ kohti on olemassa sellainen kuvaus $g : Y \to X$, että $f \circ g$ on $\mathcal{P}$-homotooppinen identiteettikuvauksen id_Y kanssa ja että $g \circ f$ on $f^{-1}(\mathcal{P})$-homotooppinen identiteettikuvauksen id_X kanssa.

Huomautus 4.15. Jos Y on metrinen avaruus ja $\varepsilon > 0$, niin voidaan puhua ε-homotooppisuudesta, jolloin edellisten määritelmien peitteen $\mathcal{P}$ tulkitaan olevan avaruuden Y kaikista ε-halkaisijaisista avoimista kuulista muodostettu peite. Tällöin voidaan puhua myös $f^{-1}(\varepsilon)$-homotooppisuudesta, jolloin tarkoitetaan vastaavasti $f^{-1}(\mathcal{P})$-homotooppisuutta tällä peitteellä $\mathcal{P}$.

Nyt pääsemme todistamaan itse homotopiaekvivalenssilauseen.

Lause 4.16. *Olkoot Y ja Y/G kompakteja ANR-avaruuksia ja G solumainen ositus. Tällöin $\pi : Y \to Y/G$ on hieno homotopiaekvivalenssi.*

Todistus. Lemman 4.1 nojalla Y ja Y/G ovat N_2-avaruuksia ja siten ne voidaan lauseen 2.49 nojalla upottaa Hilbertin kuutioon $I^{\mathbb{N}}$. Samaistetaan siis tästä edespäin joukot Y ja Y/G vastaaviin Hilbertin kuution osajoukkoihin.

Koska Y ja Y/G ovat ANR-avaruuksia, niin niillä on Hilbertin kuutiossa ympäristöt V ja V' ja niitä vastaavat retraktiot $R : V \to Y$ ja $R' : V' \to Y/G$. Koska Hilbertin kuutio on metristyvänä avaruutena T_4-avaruus, niin joukoilla Y ja Y/G on lisäksi ympäristöt $W \subseteq V$ ja $W' \subseteq V'$, joilla pätee $\overline{W} \subseteq V$ ja $\overline{W'} \subseteq V'$. Merkitään nyt $U = \overline{W}$ ja $U' = \overline{W'}$ sekä $r = R|U$ ja $r' = R'|U'$. Tällöin avaruus Y on joukon U retrakti ja avaruus Y/G on joukon U' retrakti ja niitä vastaavat retraktiot ovat $r : U \to Y$ ja $r' : U' \to Y/G$.

Jos $\mathcal{P}$ on avaruuden Y/G avoin peite, niin koska Y/G on kompakti ja metrinen, on olemassa sellainen $\varepsilon > 0$, että jokaista $x \in Y/G$ kohti on olemassa $W \in \mathcal{P}$, jolla $B(x, \varepsilon) \subseteq W$. Siis hienoa homotopiaekvivalenssia varten riittää osoittaa, että jokaista $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen kuvaus $F : Y/G \to Y$, että πF on ε-homotooppinen kuvauksen $\mathrm{id}_{Y/G}$ kanssa ja kuvaus $F\pi$ on $\pi^{-1}(\varepsilon)$-homotooppinen kuvauksen id_Y kanssa.

Määrittelemme tämän todistuksen edetessä lukuisia kuvauksia, joiden avulla muodostamme lopulta kuvauksen F ja todistamme sen toteuttavan hienon homotopiaekvivalenssin ehdot projektiokuvauksen π kanssa. Alla olevassa kaaviossa on kooste määriteltävistä kuvauksista.

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, shift left, leftarrow, "p"] \arrow[r, shift right, "e"'] & P \times Q_k \arrow[r, shift left, leftarrow, "i"] \arrow[r, shift right, "r"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\
P' \arrow[r, shift left, leftarrow, "p'"] \arrow[r, shift right, "e'"'] & P' \times Q_k \arrow[r, shift left, leftarrow, "i'"] \arrow[r, shift right, "r'"'] & Y/G
\end{tikzcd}$$

Olkoon sitten $\varepsilon > 0$. Koska Y on kompakti, niin projektiokuvaus $\pi : Y \to Y/G$ on tasaisesti jatkuva. Näin ollen on olemassa sellainen $\gamma > 0$, että $\operatorname{diam} \pi(A) < \frac{\varepsilon}{8}$ kaikilla $A \subseteq Y$, joilla $\operatorname{diam} A < \gamma$. Vastaavasti koska U on kompakti, niin retraktio $r : U \to Y$ on tasaisesti jatkuva ja siten on olemassa sellainen $\eta > 0$, että $\operatorname{diam} r(B) < \gamma$ kaikilla $B \subseteq U$, joilla $\operatorname{diam} B < \eta$. Lemman 4.12 nojalla on olemassa sellainen $k > 0$ ja äärellinen kompleksi $P \subseteq I^k$, että $Y \subseteq P \times Q_k \subseteq N(Y; \eta) \cap W$ ja $\operatorname{diam}(\{z\} \times Q_k) < \eta$ kaikilla $z \in I^k$.

Olkoon $p : P \times Q_k \to P$ projektiokuvaus ja olkoot $e : P \to P \times \{0\} \subseteq P \times Q_k$ ja $i : Y \to P \times Q_k$ inkluusioita. Nyt kuvausten $ep : P \times Q_k \to P \times \{0\}$

ja $\mathrm{id}_{P\times Q_k}$ välille on olemassa luonnollinen η-homotopia

$$\psi : (P \times Q_k) \times I \to P \times Q_k,$$

$$((x_1, x_2, \dots), t) \mapsto (x_1, \dots, x_k, tx_{k+1}, tx_{k+2}, \dots).$$

Tästä seuraa, että kuvaus $r\psi(i \times \mathrm{id}_I)$ on γ-homotopia kuvausten $repi$ ja $ri = \mathrm{id}_Y$ välillä ja kuvaus $\pi r\psi(i \times \mathrm{id}_I)$ on $\frac{\varepsilon}{8}$-homotopia kuvausten $\pi repi$ ja π välillä.

Tarkastellaan nyt kuvausta $\alpha_0 = re$. Lemman 4.11 nojalla on olemassa $\delta > 0$, jolla pätee, että jos $\alpha_1 : P \to Y$ on sellainen, että $d(\pi\alpha_1(x), \pi re(x)) < \delta$ kaikilla $x \in P$, niin kuvausten $\alpha_0 = re$ ja α_1 välille on olemassa homotopia $\theta : P \times I \to Y$, jolla $\theta(x, 0) = \alpha_0(x)$, $\theta(x, 1) = \alpha_1(x)$ ja $d(\pi\theta(x, t), \pi re(x)) < \frac{\varepsilon}{8}$ kaikilla $x \in P$ ja $t \in I$.

Lemman 4.2 nojalla on olemassa sellainen $\beta > 0$, että jos S on mielivaltainen topologinen avaruus ja $h_0, h_1 : S \to Y/G$ sellaisia kuvauksia, joilla pätee $d(h_0(s), h_1(s)) < \beta$ kaikilla $s \in S$, niin h_0 ja h_1 ovat $\frac{\varepsilon}{8}$-homotooppisia. Huomaa, että nyt $\beta \leq \frac{\varepsilon}{8}$.

Koska U' on kompakti, niin retraktio r' on tasaisesti jatkuva ja siten on olemassa $\eta' > 0$, jolla $\operatorname{diam} r'(B') < \min\{\frac{\delta}{2}, \beta\}$ kaikilla $B' \subseteq U'$, joilla $\operatorname{diam} B' < \eta'$. Jälleen lemman 4.12 mukaan on olemassa äärellinen kompleksi $P' \subseteq I^m$, jolla pätee sekä

$$Y/G \subseteq P' \times Q_m \subseteq N(Y/G; \eta') \cap W'$$

että

$$\operatorname{diam}(\{z\} \times Q_m) < \eta' \text{ kaikilla } z \in I^m.$$

Olkoon $p' : P' \times Q_m \to P'$ projektiokuvaus ja olkoot $e' : P' \to P' \times \{0\} \subseteq P' \times Q_m$ ja $i' : Y/G \to P' \times Q_m$ inkluusioita. Tällöin on olemassa jälleen luonnollinen η'-homotopia ψ' kuvausten $e'p'$ ja $id_{P'\times Q_m}$ välille. Tästä saadaan, että kuvausten $r'e'p'i'$ ja $r'i' = \mathrm{id}_{Y/G}$ välillä on homotopia $r'\psi'(i' \times \mathrm{id}_I)$, jolla

$$\operatorname{diam}(r'\psi'(i' \times \mathrm{id}_I)(\{x\} \times I)) < \min\{\tfrac{\delta}{2}, \beta\} \text{ kaikilla } x \in Y/G.$$

Lemman 4.10 nojalla on olemassa kuvaus $f : P' \to Y$, joka toteuttaa ehdon $d(\pi f(x), r'e'(x)) < \min\{\frac{\delta}{2}, \beta\}$ kaikilla $x \in P'$. Määritellään nyt haettu kuvaus $F : Y/G \to Y$ aiempien kuvausten avulla kaavalla $F = fp'i'$. Nyt on enää osoitettava, että se toteuttaa projektiokuvauksen π kanssa hienon homotopiaekvivalenssin ehdot.

Todistetaan ensin, että πF on ε-homotooppinen kuvauksen $\mathrm{id}_{Y/G}$ kanssa. Luku β valittiin siten, että πf on $\frac{\varepsilon}{8}$-homotooppinen kuvauksen $r'e'$ kanssa. Merkitään tätä kuvausten πf ja $r'e'$ välistä $\frac{\varepsilon}{8}$-homotopiaa θ'. Nyt $\theta'(p'i' \times$

id_I) toimii homotopiana kuvausten $\pi f p' i' = \pi F$ ja $r'e'p'i'$ välillä. Aiemmin todistettiin, että $r'e'p'i'$ on β-homotooppinen kuvauksen $\mathrm{id}_{Y/G}$ kanssa. Koska $\beta \leq \frac{\varepsilon}{8}$, niin kuvaus $r'e'p'i'$ on myös $\frac{\varepsilon}{8}$-homotooppinen kuvauksen $\mathrm{id}_{Y/G}$ kanssa. Näin ollen πF ja $id_{Y/G}$ ovat keskenään $\frac{\varepsilon}{4}$-homotooppisia.

Osoittaaksemme, että $F\pi$ on $\pi^{-1}(\varepsilon)$-homotooppinen kuvauksen id_Y kanssa, muodostamme kolme homotopiaa, yhden kuvausten id_Y ja $repi$ välille, toisen kuvausten $repi$ ja $F\pi repi$ välille ja kolmannen kuvausten $F\pi repi$ ja $F\pi$ välille.

Tarkastellaan kuvausta $\alpha_1 = F\pi re : P \to Y$. Nyt jos $x \in P$ ja $y = \pi re(x)$ sekä $z = p'i'(y)$, niin

$$
\begin{aligned}
d(\pi\alpha_1(x), \pi re(x)) &= d(\pi f p' i' \pi re(x), \pi re(x)) \\
&= d(\pi f p' i'(y), \mathrm{id}_{Y/G}(y)) \\
&\leq d(\pi f p' i'(y), r'e'p'i'(y)) + d(r'e'p'i'(y), \mathrm{id}_{Y/G}(y)) \\
&= d(\pi f(z), r'e'(z)) + d(r'e'p'i'(y), \mathrm{id}_{Y/G}(y)) \\
&< \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} = \delta.
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

Luvun δ valinnan ansiosta on olemassa sellainen homotopia $\theta : P \to Y$, että $\theta(x, 0) = re(x)$, $\theta(x, 1) = F\pi re(x)$ ja $\operatorname{diam} \pi\theta(\{x\} \times I) < \frac{\varepsilon}{4}$ kaikilla $x \in P$. Aiemmin mainittu homotopia $r\psi(i \times \mathrm{id}_I)$ kuvausten id_Y ja $repi$ välillä ja homotopia $\theta(pi \times \mathrm{id}_I)$ kuvausten $repi$ ja $F\pi repi$ välillä antavat yhdessä kuvausten id_Y ja $F\pi repi$ välille homotopian $\xi : Y \times I \to Y$, joka yhdistettynä projektiokuvaukseen π siirtää avaruuden Y/G pisteitä vähemmän kuin luvun $\frac{3}{8}\varepsilon$ verran. Lopuksi kuten kaavassa 4.17 saadaan, että jos $x \in Y$ ja $y = \pi(x)$ sekä $z = p'i'(y)$, niin

$$
\begin{aligned}
d(\pi F\pi(x), \pi(x)) &= d(\pi F(y), \mathrm{id}_{Y/G}(y)) = d(\pi f p' i'(y), \mathrm{id}_{Y/G}(y)) \\
&\leq d(\pi f(z), r'e'(z)) + d(r'e'p'i'(y), \mathrm{id}_{Y/G}(y)) \\
&< 2\beta \leq \tfrac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Soveltamalla tätä epäyhtälöketjua ja aiemmin todistettua tietoa, että $\pi r\psi(i \times \mathrm{id}_I)$ on $\frac{\varepsilon}{8}$-homotopia kuvausten $\pi repi$ ja π välillä, saadaan, että jos $x \in Y$ ja $t_0, t_1 \in I$, niin

$$
\begin{aligned}
&d(\pi F\pi r\psi(i \times \mathrm{id}_I)(x, t_0), \pi F\pi r\psi(i \times \mathrm{id}_I)(x, t_1)) \\
&\leq d(\pi F\pi r\psi(i \times \mathrm{id}_I)(x, t_0), \pi r\psi(i \times \mathrm{id}_I)(x, t_0)) \\
&\quad + d(\pi r\psi(i \times \mathrm{id}_I)(x, t_0), \pi r\psi(i \times \mathrm{id}_I)(x, t_1)) \\
&\quad + d(\pi r\psi(i \times \mathrm{id}_I)(x, t_1), \pi F\pi r\psi(i \times \mathrm{id}_I)(x, t_1)) \\
&< \tfrac{\varepsilon}{4} + \tfrac{\varepsilon}{8} + \tfrac{\varepsilon}{4} = \tfrac{5}{8}\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Siis $F\pi r\psi(i\times \mathrm{id}_I)$ on sellainen homotopia kuvausten $F\pi repi$ ja $F\pi$ välillä, että yhdistettynä kuvaukseen π se siirtää avaruuden Y/G pisteitä radoilla, joiden halkaisijat ovat pienempiä kuin $\frac{5}{8}\varepsilon$.

Näin ollen homotopia $\xi : Y \times I \to Y$ kuvausten id_Y ja $F\pi repi$ välillä ja homotopia $F\pi r\psi(i \times \mathrm{id}_I)$ kuvausten $F\pi repi$ ja $F\pi$ välillä antavat yhdessä kuvausten id_Y ja $F\pi$ välille homotopian, jonka ratojen kuvat projektiokuvauksessa π ovat halkaisijoiltaan alle ε kuten haluttiin. $\square$

Lauseesta pätee myös yleisempi versio, jossa avaruuksien Y ja Y/G on oletettu kompaktin sijaan olevan N_2-avaruuksia. Sen todistus hyödyntää peitteiden tähtitihennyksiä ja siinä käytetään äärellisten simplisiaalisten kompleksien sijaan lokaalisti äärellisiä simplisiaalisia komplekseja. Sopivien lokaalisti äärellisten simplisiaalisten kompleksien löytämiseen käytetään Hannerin karakterisaatiota separoituville ANR-avaruuksille [Hav75].

Lauseen ehto “Y ja Y/G ovat ANR-avaruuksia” herättää kysymyksen, että milloin Y/G on ANR-avaruus. Jos Y on ANR-avaruus, niin onko myös Y/G välttämättä ANR-avaruus? Tämä ei pidä suoraan paikkansa tässä muodossa, mutta on todistettu, että jos G on lokaalisti kompaktin ANR-avaruuden Y solumainen ositus, jolla tekijäavaruus Y/G on äärellisulotteinen, niin myös Y/G on ANR-avaruus [Dav86, korollaari 16.12B]. Tosin sitten herää taas kysymys, että milloin tekijäavaruus Y/G on äärellisulotteinen? Jos Y on äärellisulotteinen, niin onko myös Y/G välttämättä äärellisulotteinen? Tämä kysymys on edelleen ratkaisematta [MR88].

Luku 5

Haarautuvat peitekuvaukset

Siirrymme sitten tutkielman toiseen ja viimeiseen pääaiheeseen *haarautuvat peitekuvaukset* (engl. *branched coverings*). Oletamme koko luvun ajan, että X ja Y ovat lokaalisti kompakteja ANR-avaruuksia ja että G on avaruuden X solumainen ositus ja H on avaruuden Y solumainen ositus ja $\pi : X \to X/G$ ja $\pi' : Y \to Y/H$ ovat osituksia vastaavat projektiokuvaukset.

Haarautuviksi peitekuvauksiksi kutsumme avoimia diskreettejä jatkuvia kuvauksia.

Määritelmä 5.1. Kuvausta sanotaan *avoimeksi*, jos jokaisen avoimen joukon kuva siinä on avoin.

Määritelmä 5.2. Kuvausta sanotaan *diskreetiksi*, jos jokaisen pisteen alkukuva siinä on diskreetti.

Määritelmä 5.3. Avointa diskreettiä jatkuvaa kuvausta kutsutaan *haarautuvaksi peitekuvaukseksi*.

Todistamme tässä luvussa yksinkertaisen riittävän ja välttämättömän ehdon sille, että ankara haarautuva peitekuvaus lokaalisti kompaktilta ANR-avaruudelta lokaalisti kompaktille ANR-avaruudelle virittää myös avaruuksista muodostettujen solumaisten ositusavaruuksien välille haarautuvan peitekuvauksen. Jotta viritetty kuvaus olisi hyvin määritelty, on alkuperäisen kuvauksen kuitenkin täytettävä seuraavanlainen yhteensopivuusehto. Tämän yhteensopivuusehdon vahva versio on edellä mainittu ominaisuus, jonka osoitamme olevan yhtäpitävä sen kanssa, että haarautuvan peitekuvauksen virittämä kuvaus on haarautuva peitekuvaus.

Määritelmä 5.4. Jatkuva kuvaus $f : X \to Y$ on (G, H)*-yhteensopiva*, jos kaikilla $x \in X$ pätee

$$f(\pi^{-1}\{\pi(x)\}) \subseteq (\pi')^{-1}\{\pi'(f(x))\}.$$

Jatkuva kuvaus $f : X \to Y$ on sen sijaan *vahvasti* (G, H)*-yhteensopiva*, jos kaikilla $x \in X$ pätee

$$f(\pi^{-1}\{\pi(x)\}) = (\pi')^{-1}\{\pi'(f(x))\}.$$

(G, H)-yhteensopiva kuvaus $f : X \to Y$ määrää yksikäsitteisen kuvauksen $\tilde{f} : X/G \to Y/H$ kaavalla $\tilde{f}(x) = \pi'(f(y))$, missä $y \in \pi^{-1}\{x\}$.

Lause 5.5. *Olkoon $f : X \to Y$ jatkuva kuvaus, joka on (G, H)-yhteensopiva. Tällöin kuvaus $\tilde{f} : X/G \to Y/H$ on hyvin määritelty ja jatkuva.*

Todistus. Osoitetaan ensin, että $\tilde{f}$ on hyvin määritelty. Olkoot $x \in X/G$ ja $y, z \in \pi^{-1}\{x\}$. Koska f on (G, H)-yhteensopiva, niin pätee

$$f(\pi^{-1}\{x\}) \subseteq (\pi')^{-1}\{\pi'(f(y))\}$$

ja

$$f(\pi^{-1}\{x\}) \subseteq (\pi')^{-1}\{\pi'(f(z))\}.$$

Näin ollen $(\pi')^{-1}\{\pi'(f(y))\} \cap (\pi')^{-1}\{\pi'(f(z))\} \neq \varnothing$. Koska H on ositus ja

$$(\pi')^{-1}\{\pi'(f(y))\}, (\pi')^{-1}\{\pi'(f(z))\} \in H,$$

niin $(\pi')^{-1}\{\pi'(f(y))\} = (\pi')^{-1}\{\pi'(f(z))\}$. Näin ollen $\pi'(f(y)) = \pi'(f(z))$.

Osoitetaan sitten, että $\tilde{f}$ on jatkuva. Kuvauksen $\tilde{f}$ määritelmän mukaan kaavio

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & Y \arrow[d, "\pi'"] \\ X/G \arrow[r, "\tilde{f}"] & Y/H \end{tikzcd}$$

kommutoi. Koska π on samastuskuvaus ja $\pi' \circ f$ on jatkuva, niin $\tilde{f}$ on jatkuva. □

Todistamme sitten, että avoin ja vahvasti (G, H)-yhteensopiva kuvaus $f : X \to Y$ virittää avoimen kuvauksen $\tilde{f} : X/G \to Y/H$.

Lause 5.6. *Olkoon $f : X \to Y$ avoin kuvaus, joka on vahvasti (G, H)-yhteensopiva. Tällöin $\tilde{f}$ on avoin.*

Todistus. Olkoon $U \subseteq X/G$ avoin. Tällöin joukko $\pi^{-1}U$ on avoin, koska projektiokuvaus π on jatkuva. Lisäksi $\pi^{-1}U$ on saturoitu. Nyt kuvauksen f avoimuuden nojalla joukko $f(\pi^{-1}U)$ on avoin ja vahvan yhteensopivuuden nojalla saturoitu. Siis $\tilde{f}(U) = \pi'(f(\pi^{-1}U))$ on avoin. □

Luvun päätulosta varten riittää enää tarkastella, milloin $\tilde{f}$ on diskreetti. Teemme tämän kahdessa osassa. Ensimmäisessä osassa osoitamme, että vahvasti yhteensopiva diskreetti ankara kuvaus virittää ositusavaruuksien välille diskreetin kuvauksen.

Lause 5.7. *Olkoon $f : X \to Y$ diskreetti ankara kuvaus, joka on vahvasti (G, H)-yhteensopiva. Tällöin indusoitu kuvaus $\tilde{f} : X/G \to Y/H$ on diskreetti.*

Todistus. Olkoon $y \in Y$ mielivaltainen. Nyt alkukuva $f^{-1}\{y\}$ on kompakti ja diskreetti, koska kuvaus f on ankara ja diskreetti. Tästä seuraa, että $f^{-1}\{y\}$ on äärellinen. Kuvauksen f vahvan yhteensopivuuden nojalla

$$f(\pi^{-1}\{\pi(x)\}) = (\pi')^{-1}\{\pi'(y)\}$$

kaikilla $x \in \pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}\{\pi'(y)\})$, joten koska $y \in (\pi')^{-1}\{\pi'(y)\}$, niin jokainen osituksen G joukko $\pi^{-1}\{\pi(x)\}$, jolla $x \in \pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}\{\pi'(y)\})$, sisältää pisteen alkukuvasta $f^{-1}\{y\}$. Nyt koska $f^{-1}\{y\}$ on äärellinen, niin myös $\tilde{f}^{-1}\{\pi'(y)\}$ on äärellinen. Koska X on metristyvänä avaruutena Hausdorff, niin lauseen 3.10 nojalla tekijäavaruus X/G on Hausdorff ja joukko $\tilde{f}^{-1}\{\pi'(y)\} \subseteq X/G$ on siten diskreetti. $\square$

Toinen osa vaatii kaksi lemmaa, joista vielä ensimmäisen todistus käyttää seuraavanlaisia kahta lemmaa.

Lemma 5.8. [Vai15, lauseet 15.25 ja 13.36] *Olkoon S kompakti Hausdorffin avaruus. Tällöin jokainen avaruuden S komponentti A on leikkaus kaikista sellaisista joukon A sisältävistä joukoista, jotka ovat sekä avoimia että suljettuja.*

Lemma 5.9. *Olkoot S kompakti metristyvä avaruus ja C avaruuden S komponentti. Tällöin on olemassa laskeva jono $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ avaruuden S osajoukkoja, jotka ovat kaikki sekä avoimia että suljettuja ja joilla pätee $C = \cap_n A_n$.*

Todistus. Olkoot d avaruuden S metriikka ja C avaruuden S komponentti. Määrittelemme

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \{A \subseteq S \,|\, C \subseteq A, A \text{ avoin ja suljettu joukossa } S\} \text{ ja} \\
\mathcal{B} &= \{B \subseteq S \,|\, B \cap C = \varnothing, B \text{ avoin ja suljettu joukossa } S\} \\
&= \{S \setminus A \,|\, A \in \mathcal{A}\}.
\end{aligned}$$

Tällöin lemman 5.8 nojalla pätee $\cap_{A \in \mathcal{A}} A = C$, mikä on ekvivalentti yhtäsuuruuden $\cup_{B \in \mathcal{B}} B = S \setminus C$ kanssa.

Tarkastellaan nyt joukkoa

$$K_n = \{x \in S \mid d(x, C) \geq \tfrac{1}{n}\}$$

kullakin $n \in \mathbb{N}$. Se on avaruuden S kompakti osajoukko, joka ei leikkaa joukkoa C. Siis se voidaan peittää äärellisen monella peitteen $\mathcal{B}$ joukolla. Koska $\mathcal{B}$ on vakaa äärellisen yhdisteen suhteen, niin on olemassa yksi joukko $B_n \in \mathcal{B}$, jolla pätee $K_n \subseteq B_n$.

Määritellään nyt $A_n = S \setminus (B_1 \cup \cdots \cup B_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin A_n on sekä avoin että suljettu ja $C \subseteq A_n$ sekä $A_n \supset A_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi saadaan

$$C \subseteq \bigcap_n A_n \subseteq \bigcap_n (S \setminus B_n) \subseteq \bigcap_n (S \setminus K_n) = C.$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa siitä, että C on suljettu. Nyt siis pätee $\cap_n A_n = C$ kuten haluttiin. □

Nyt voimme todistaa lauseen lemmoista ensimmäisen.

Lemma 5.10. *Olkoon $f : X \to Y$ avoin ankara kuvaus ja $K \subseteq Y$ kompakti yhtenäinen joukko. Tällöin kullekin joukon $f^{-1}K$ komponentille C pätee $f(C) = K$.*

Todistus. Merkitään $Z = f^{-1}K$. Olkoon C joukon Z komponentti. Koska K on kompakti ja f ankara, niin Z on kompakti. Lisäksi koska X on metristyvä, niin $Z \subseteq X$ on metristyvä. Siis aliavaruus Z täyttää lemman 5.9 ehdot.

Olkoon $A \subseteq Z$ sekä avoin että suljettu avaruudessa Z. Koska A on avoin avaruudessa Z, on olemassa sellainen avoin joukko $U \subseteq X$, että $A = U \cap Z$. Tällöin $f(A) = f(U) \cap K$. Nyt koska f on avoin kuvaus, niin $f(U)$ on avoin joukko. Tästä seuraa, että $f(A) = f(U) \cap K$ on avoin avaruudessa K. Vastaavasti koska $A \subseteq Z$ on suljettu ja siten kompakti, niin $f(A) \subseteq K$ on kompakti ja siten suljettu Hausdorffin avaruudessa K. Nyt siis jos $A \subseteq Z$ on epätyhjä ja sekä avoin että suljettu, niin $f(A) = K$, koska K on yhtenäinen.

Olkoon sitten $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ lemman 5.9 antama laskeva jono avaruuden Z osajoukkoja, jotka ovat sekä avoimia että suljettuja ja joilla pätee $\cap_n A_n = C$. Tällöin $f(A_n) = K$ kullakin $n \in \mathbb{N}$ kuten juuri todistettiin.

Olkoon nyt $p \in K$ mielivaltainen. Tällöin jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa sellainen $q_n \in A_n$, että $f(q_n) = p$. Koska X on kompakti, voimme tarvittaessa siirtymällä osajonoon olettaa, että jono (q_n) suppenee. Olkoon nyt $q \in Z$ se piste, jota kohti jono suppenee. Tällöin kuvauksen f jatkuvuuden nojalla $f(q) = \lim_{n \to \infty} f(q_n) = p$.

Koska joukot A_n ovat väheneviä, saadaan $q_k \in A_n$ kaikilla $k \geq n$. Koska A_n on suljettu avaruudessa Z, tästä seuraa, että $q \in A_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Nyt $q \in \cap_n A_n = C$ ja siten $p = f(q) \in f(C)$. Koska $p \in K$ oli valittu mielivaltaisesti, niin saadaan $f(C) = K$, kuten haluttiin. $\square$

Lemmoista jälkimmäisessä osoitetaan, että ANR-avaruuden solumaiset osajoukot ovat yhtenäisiä.

Lemma 5.11. *Olkoot Y ANR-avaruus ja $C \subseteq Y$ solumainen avaruudessa Y. Tällöin C on yhtenäinen.*

Todistus. Tehdään vastaväite, että C on epäyhtenäinen. Tällöin on olemassa kaksi avointa epätyhjää erillistä joukkoa $A, B \subseteq C$, joilla $A \cup B = C$. Nyt siis A ja B ovat myös suljettuja joukossa C, joten kompaktin joukon suljettuina osajoukkoina ne ovat kompakteja. Koska Y on metristyvä, niin se on Hausdorff, joten kompakteilla joukoilla A ja B on erilliset ympäristöt U ja V avaruudessa Y. Tällöin $U \cup V$ on joukon C epäyhtenäinen ympäristö. Jokainen epäyhtenäinen joukko on myös epäpolkuyhtenäinen, joten $U \cup V$ on epäpolkuyhtenäinen. Lauseen 4.7 nojalla joukolla C on ominaisuus 0-UV, joten joukolla C on ympäristö $W \subseteq U \cup V$, jonka jokainen piste on yhdistettävissä joukon jokaiseen toiseen pisteeseen polulla, joka sisältyy joukkoon $U \cup V$. Joukot U ja V sisältävät molemmat joukon C pisteitä, joten koska $C \subseteq W$, niin ne sisältävät myös joukon W pisteitä. Siis joukon W pisteitä on joukon $U \cup V$ kahdessa eri polkukomponentissa. Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että kaikki joukon W pisteet ovat yhdistettävissä toisiinsa polulla joukossa $U \cup V$. Näin ollen C on yhtenäinen. $\square$

Näiden kahden lemman avulla voimme todistaa kuvauksen $\tilde{f}$ diskreettiyden tarkastelun toisen osan.

Lause 5.12. *Olkoon $f : X \to Y$ ankara haarautuva peitekuvaus, joka on (G, H)-yhteensopiva. Oletetaan lisäksi, että indusoitu kuvaus $\tilde{f} : X/G \to Y/H$ on diskreetti. Tällöin f on vahvasti (G, H)-yhteensopiva.*

Todistus. Olkoot $x \in X$, $y = f(x)$ ja $C \subseteq X$ se joukon $f^{-1}((\pi')^{-1}\{\pi'(y)\})$ komponentti, johon x kuuluu. Tällöin lemman 5.10 nojalla

$$f(C) = (\pi')^{-1}\{\pi'(y)\}.$$

Olkoon $x' \in C$. Tällöin $f(x') \in f(C) = (\pi')^{-1}\{\pi'(y)\}$, joten

$$(\pi')^{-1}\{\pi'(f(x'))\} = (\pi')^{-1}\{\pi'(y)\}.$$

Kuvauksen f (G, H)-yhteensopivuudesta seuraa, että

$$f(\pi^{-1}\{\pi(x')\}) \subseteq (\pi')^{-1}\{\pi'(f(x'))\} = (\pi')^{-1}\{\pi'(y)\},$$

joten $\pi^{-1}\{\pi(x')\} \subseteq f^{-1}((\pi')^{-1}\{\pi'(y)\})$. Koska ositus G on solumainen, niin joukko $\pi^{-1}\{\pi(x')\}$ on solumainen, joten lemman 5.11 nojalla $\pi^{-1}\{\pi(x')\}$ on yhtenäinen. Koska $x' \in C$ ja C on komponentti, niin $\pi^{-1}\{\pi(x')\} \subseteq C$. Näin ollen joukko C on saturoitu.

Osoitetaan nyt, että kuvaus $\tilde{f}$ on ankara. Olkoon $B \subseteq Y/H$ on kompakti. Tällöin $\tilde{f}^{-1}B = \pi f^{-1}(\pi')^{-1}B$ on kompakti, sillä π' ja f ovat ankaria ja π jatkuva. Näin ollen $\tilde{f}$ on ankara. Lisäksi $\tilde{f}$ on oletuksen nojalla diskreetti. Siis pisteiden alkukuvat kuvauksessa $\tilde{f}$ ovat äärellisiä. Nyt siis $\tilde{f}^{-1}\pi'(y)$ on äärellinen, mistä seuraa, että C koostuu äärellisen monesta osituksen G joukosta. Koska kukin näistä joukoista on solumainen, niin ne ovat kaikki suljettuja aliavaruudessa C, ja koska joukkoja on äärellinen määrä, niin ne ovat lisäksi avoimia aliavaruudessa C. Siis koska C on yhtenäinen, niin se voi koostua vain yhdestä tällaisesta joukosta, joten

$$f(\pi^{-1}\{\pi(x)\}) = f(C) = (\pi')^{-1}\{\pi'(y)\} = (\pi')^{-1}\{\pi'(f(x))\}.$$

Tämä päättää todistuksen. □

Luvun päälause seuraa yhdistämällä edelliset tulokset.

Lause 5.13. *Olkoon $f : X \to Y$ ankara haarautuva peitekuvaus, joka on (G, H)-yhteensopiva. Tällöin indusoitu kuvaus $\tilde{f}$ on haarautuva peitekuvaus, jos ja vain jos f on vahvasti (G, H)-yhteensopiva.*

Kirjallisuutta

[Ale20] James W. Alexander. Note on Riemann Spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 26(8):370–372, 1920.

[AP69] Steve Armentrout ja Thomas M. Price. Decompositions into Compact Sets with UV Properties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 141:433–442, 1969.

[BM17] Mario Bonk ja Daniel Meyer. *Expanding Thurston Maps.* American Mathematical Society, 2017.

[Dav86] Robert J. Daverman. *Decompositions of Manifolds.* Academic Press, 1986.

[Dug66] James Dugundji. *Topology.* 12. painos, Allyn and Bacon, Inc., 1966.

[Han51] Olof Hanner. Some Theorems on Absolute Neighborhood Retracts. *Ark. Mat.*, 1(5):389–408, 1951.

[Hav75] William E. Haver. Mappings Between ANR's That Are Fine Homotopy Equivalences. *Pacific J. Math.*, 58(2):457–461, 1975

[Koz] George Kozlowski. *Images of ANRs* (julkaisematon käsikirjoitus).

[MR88] W. J. R Mitchell ja D. Repovš. The Topology of Cell-like Mappings. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari*, 58:265–300, 1988.

[Mun84] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology.* Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

[Rud69] Mary Ellen Rudin. A New Proof That Metric Spaces Are Paracompact. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 20(2):602, 1969.

[Sto56] Arthur H. Stone. Metrizability of Decomposition Spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7(4):690–700, 1956.

[Vai15] Jussi Väisälä. *Topologia II*. 3. painos, Limes ry, 2015.